Cours Euler: Série 4

le 19 septembre 2018

Exercice 1

Pour les paires ou triples de nombres suivants, donne la liste (notation ensembliste avec accolades) de tous les diviseurs de chaque nombre. Donne ensuite la liste des diviseurs communs et identifie le pgdc dans cette liste. Représente ces ensembles sous forme de bulles (diagramme de Venne) comme dans le cours. Chaque fois qu'il y a une zone vide, explique pourquoi elle est vide.

1. 72 et 96
2. 56 et 45
3. 45 et 495
4. 54, 72 et 126
5. 0, 72, 96

Exercice 2

Donne une preuve des affirmations vraies et un contre-exemple pour les affirmations fausses.

11. Vrai ou faux?

Dans l'ensemble des nombres entiers naturels :

a) 0 se divise par tous les nombres.
b) Tous les nombres ne se divisent pas par 1.
c) Aucun nombre ne se divise par lui-même.
d) Si a se divise par b, alors a est plus grand que b.
e) 0 divise tous les nombres.
f) Si a et b se divisent par c, alors $a + b$ se divise par c.
g) Si a se divise par c, alors $a \cdot x$ ne se divise pas par c.
h) 0 est multiple de tous les nombres.

Même question avec les affirmations suivantes :

1. Pour tous $m, n, p \in \mathbb{N}$, $n|m$ et $m|p \Rightarrow n|p$.
2. Pour tous $m, n, p \in \mathbb{N}$, $(n \cdot p) \,|\, m \Rightarrow n \,|\, m$ et $p \,|\, m$.
3. Pour tous $m, n, p \in \mathbb{N}$, $n \,|\, m$ et $p \,|\, m \Rightarrow (n \cdot p) \,|\, m$.
4. Pour tous $m, n, p \in \mathbb{N}$, $m \,|\, (n \cdot p) \Rightarrow m \,|\, n$ ou $m \,|\, p$.
5. Pour tous $m, n, p \in \mathbb{N}$, $m \,|\, n$ ou $m \,|\, p \Rightarrow m \,|\, (n \cdot p)$.

Parmi les affirmations 1) à 5), pour chaque affirmation fausse, essaie de trouver une condition sur les nombres m, n, p sous laquelle elle est vraie.

Exercice 3

Donne les cinq premiers multiples communs des nombres suivants en utilisant le ppmc.

1. 8 et 18
2. 80 et 60
3. 13 et 17
4. 9, 12 et 24
5. 7, 8 et 9
6. 3, 6 et 60
7. 0 et 2537

Exercice 4

Donne tous les diviseurs communs des nombres suivants en utilisant le pgdc.

1. 80 et 144
2. 48 et 96
3. 40 et 63
4. 258 et 326
5. 112, 224 et 448
6. 112, 224 et 226

Exercice 5

32.

Décompose en produits de facteurs premiers :
25'000 , 150'000 , 4700 , 4200 , 20'000'000 ,
4095 , 375'000.

Puis décompose les nombres suivants : 343, 1111, 6561, 16317, 425′425 et 15′000′000.

Exercice 6

Vérifie sur un exemple, puis démontre les affirmations suivantes en utilisant la définition de $m \geq n$ donnée au cours.

1. Pour tous $m, n, k \in \mathbb{N}$, $m \geq n \Rightarrow m + k \geq n + k$.
2. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $m \geq m$ et $m \geq 0$.
3. Pour tous $m, n, k \in \mathbb{N}$, $(m \geq n$ et $n \geq k) \Rightarrow m \geq k$.

Montre ensuite quelques propriétés de la soustraction (Proposition 1.4) :

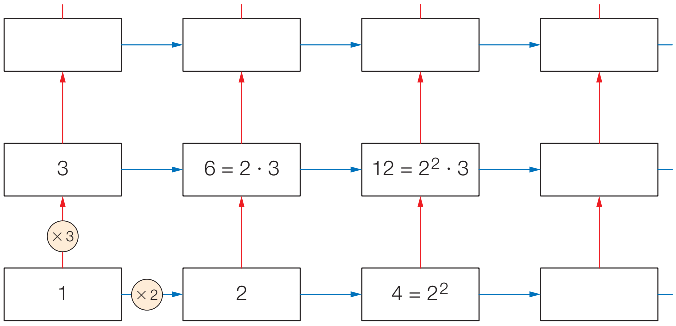
1. Pour tous $m, n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$ et $n - k \leq m$ on a $m - (n - k) = (m + k) - n$.
2. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $m - m = 0$ et $m - 0 = m$.

Pour chaque propriété, on a donné une condition sous laquelle la soustraction à gauche de l'égalité est bien définie. Tu dois donc commencer par prouver que la soustraction de droite est bien définie. Ensuite seulement montre que l'expression de droite est égale à l'expression de gauche en utilisant la définition de la soustraction vue au cours.

Exercice 7

18. Quels facteurs ?

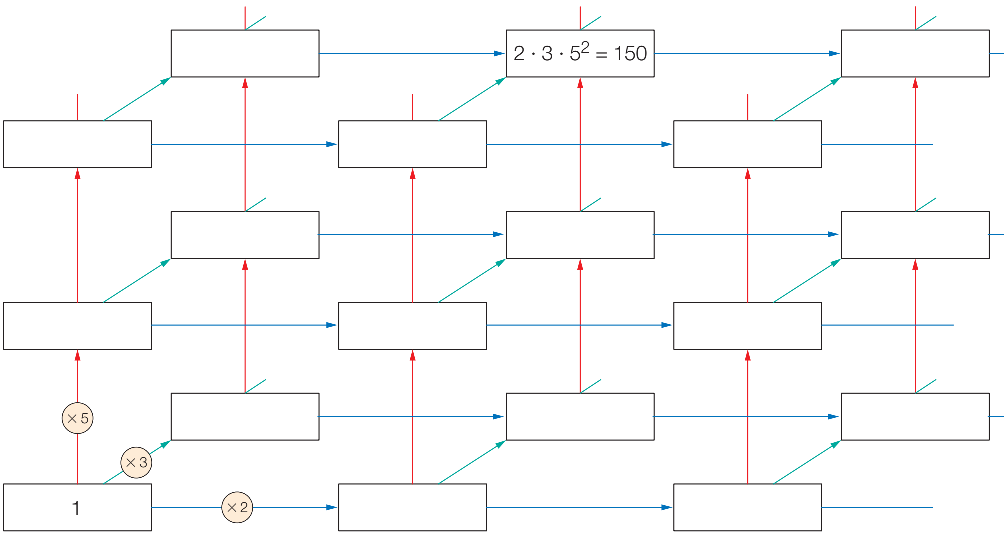
a) Complète cette grille de la même manière, c'est-à-dire à l'aide de produits de nombres premiers.



b) Si tu prolongeais cette grille, quels nombres parmi les suivants s'y trouveraient ? Où ?
144 ; 256 ; 200 ; 2187 ; 7776 ; 576 ; 2336 ; 2^{10} ; $2 \cdot 3^4$; 12^3

c) Où se situent les puissances de 6 ?

d) Fais de même avec cette seconde grille :



e) Que représente l'ensemble des 18 nombres obtenus ?

f) Où se situent les multiples de 10 ?

Exercice 8

19. Avec ou sans décomposition ?

1) Quel est le ppmc de :

a) 40 et 20 ?
b) 41 et 820 ?
c) 460 et 240 ?
d) 78 et 80 ?
e) 5, 10 et 11 ?
f) 96 et 60 ?
g) 3, 4, 5 et 6 ?
h) 343 et 256 ?
i) 1000 et 1024 ?

2) Et leur pgdc ?

Exercice 9

Tu peux utiliser le tableau de la donnée. La suite sur feuille à part.

Complète ce tableau :

facteurs		pgdc de *a* et *b*	ppmc de *a* et *b*	$a \cdot b$
a	*b*			
220	300			
45	150			
24	54			
	36	12	180	
		20		1200
		56		344'960
			2160	25'920

(1) Quelle relation constates-tu entre le produit $a \cdot b$ et le ppmc et le pgdc de a et b ?

(2) Donne une démonstration de ce résultat en utilisant la caractérisation du cours du pgdc et du ppmc par les facteurs premiers.

Exercice 10

31.

Trouve le chemin qui mène de la case «X» à la case «Y» en passant par 13 cases contiguës différentes contenant chacune un nombre premier.

37	23	11	X	79	31	19
43	67	49	17	51	17	11
29	57	61	47	63	13	23
19	59	81	79	41	89	91
13	93	47	89	27	53	67
61	43	21	31	41	59	73
97	89	83	Y	71	83	97

Exercice 11

Un *carré parfait* est un nombre naturel qui est le carré d'un nombre naturel. De même pour les *cubes parfaits*. Un nombre naturel est *premier* s'il a exactement deux diviseurs.

13. On recherche...

a) Des nombres qui ont exactement 3 diviseurs.
b) Des carrés parfaits compris entre 500 et 1000.
c) Des cubes parfaits compris entre 500 et 1000.
d) Tous les nombres divisibles par 12.
e) Des carrés multiples de 5.
f) Le plus petit multiple commun des 5 premières puissances de 2.
g) Le plus petit multiple commun des 10 premiers nombres 1, 2, … , 9, 10.
h) Un multiple de 5 et 7 qui se termine par 3.
i) Un multiple de 17 et 18 qui se termine par 8.
j) Des nombres qui sont à la fois des carrés parfaits et des cubes parfaits.
k) Des cubes multiples de 2.

Exercice 12

14. Energie solaire

A Zermatt, cinq petits bus, à énergie solaire, effectuent des boucles différentes à partir de la place de la Gare. Les durées, variables, sont les suivantes :

- ligne A : 40 minutes ;
- ligne B : 20 minutes ;
- ligne C : 30 minutes ;
- ligne D : 10 minutes ;
- ligne E : 25 minutes.

A 16 h 30, un Japonais de passage sur la place, après une excursion au pied du Cervin, reconnaît les cinq bus qu'il a photographiés le matin, au même endroit.

Saurais-tu dire quelle heure il était alors ?

Exercice 13

Un paysan possède un terrain en forme de trapèze de côtés 24 m, 54 m, 90 m et 150 m. Il aimerait entourer son terrain d'une barrière. Pour ce faire, il plante des poteaux. Ces poteaux sont séparés d'une distance fixe qui est un nombre naturel de mètres et il plante un poteau à chaque angle du terrain. Quelle est la distance entre les poteaux sachant que le paysan veut utiliser le moins de poteaux possibles.

Exercice 14

Le crible d'Eratosthène. Le mathématicien grec Eratosthène (284-192 av. J.-C.) a mis au point une méthode algorithmique pour déterminer tous les nombres premiers inférieurs à un nombre naturel n, $n \geq 2$. Suivons sa méthode pour par exemple $n = 100$ (utiliser la grille ci-dessous).
Commence par tracer 1 qui n'est pas premier et entourer 2, qui est premier. Puis trace tous les multiples de 2 plus grands que 2. Le prochain nombre après le nombre entouré qui est non tracé (ici le nombre 3) est premier. Entoure-le et trace tous ses multiples sauf lui-même. Le prochain nombre non tracé après le nombre entouré est premier. Trace tous ses multiples supérieurs. Et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les nombres soient tracés ou entourés. Les nombres entourés sont alors tous le nombres premiers inférieurs à 100.

Crible d'Erathostène pour les nombres jusqu'à 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1. A chaque étape, pourquoi est-ce que le prochain nombre non tracé après le nombre entouré est forcément premier ?
2. A chaque étape, pour tracer les multiples du nombre entouré p, il suffit de commencer à les chercher à partir de p^2. Pourquoi ?
3. Si on cherche tous les nombres premiers inférieurs à n, à partir de quel nombre entouré puis-je être sûr que tous ses multiples inférieurs à n ont déjà été tracés. Pour $n = 100$, cela arrive à partir de quel nombre ?

Pour ceux qui encore envie de travailler, voici un exercice qui n'est pas obligatoire et que l'on peut faire directement sur la donnée !

Exercice supplémentaire.

Pour résoudre cette énigme, respecte les règles suivantes :

- l'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée ;
- lorsqu'un nombre de cette grille est égal au produit de deux autres nombres appartenant à la même ligne ou à la même colonne, biffe les trois cases contenant ces nombres ;
- un même nombre peut faire partie de plusieurs « combinaisons » horizontales ou verticales ;
- à la fin, il te reste 4 cases dont les lettres prises toutes ensemble forment trois mots que tu dois retrouver.

I 720	**S** 6	**P** 60	**F** 150	**P** 1800	**F** 5	**A** 12	**P** 72	**S** 180	**E** 30
C 3600	**O** 487	**R** 7	**O** 60	**M** 15	**E** 27	**C** 36	**I** 4	**I** 9	**P** 900
D 13	**F** 3	**J** 210	**E** 8	**N** 105	**L** 52	**S** 4	**P** 33	**E** 11	**S** 2
C 6	**P** 288	**F** 99	**O** 11	**F** 48	**E** 84	**S** 1	**C** 168	**E** 14	**M** 9
B 50	**A** 25	**E** 33	**S** 13	**H** 78	**E** 10	**P** 2	**R** 6	**F** 5	**P** 100
C 11	**I** 112	**R** 95	**C** 5	**E** 7	**I** 133	**I** 19	**I** 132	**D** 12	**G** 16
S 45	**E** 54	**N** 420	**E** 15	**P** 2	**S** 6	**E** 3	**P** 18	**F** 840	**L** 140
U 4	**N** 1944	**I** 20	**L** 30	**C** 120	**R** 35	**M** 120	**C** 42	**S** 55	**G** 15
S 72	**E** 9	**S** 1470	**S** 165	**F** 840	**O** 50	**P** 8	**E** 576	**R** 20	**M** 450
P 80	**E** 216	**C** 3	**A** 143	**R** 96	**O** 240	**I** 72	**R** 288	**D** 216	**P** 240