Cours Euler: Série 2

le 5 septembre 2018

Exercice 1

Considérons l'ensemble de symboles $S = \{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \triangle\}$. Détermine si les affirmations ci-dessous sont vraies ou fausses. Justifie dans les cas où c'est faux.]

1. $\{\clubsuit, \diamondsuit, \triangle, \heartsuit, \spadesuit\} = S$, $\quad S = \{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \clubsuit, \triangle\}$, $\quad S = \{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \square, \triangle, \clubsuit\}$
2. $\{\diamondsuit, \clubsuit\} \subset S$, $\quad S \supset \{\spadesuit, \spadesuit\}$, $\quad \{\heartsuit, \square\} \subset S$, $\quad \{\triangle\} \subset S$
3. $\{\square, \diamondsuit\} \subset \{\spadesuit, \triangle, \square, \clubsuit.\diamondsuit\}$, $\quad \{\spadesuit, \triangle, \heartsuit\} \ni \triangle$, $\quad \{\spadesuit\} \in S$, $\quad S \subset S$
4. $\{\spadesuit, \triangle, \heartsuit\} \ni \{\triangle\}$, $\quad \spadesuit \subset S$, $\quad \emptyset \subset \{\clubsuit, \triangle, \square\}$, $\quad \{\spadesuit, \clubsuit\} \not\subset \{\clubsuit, \triangle, \spadesuit\}$
5. $\{\heartsuit, \triangle, \clubsuit\} \subset \mathcal{P}(S)$, $\quad \mathcal{P}(S) \ni \{\heartsuit, \triangle, \clubsuit\}$, $\quad \diamondsuit \in \mathcal{P}(S)$, $\quad S \in \mathcal{P}(S)$
6. $\{\{\diamondsuit, \heartsuit\}, \spadesuit\} \subset \mathcal{P}(S)$, $\quad \{\{\diamondsuit, \heartsuit\}, \{\spadesuit\}\} \subset \mathcal{P}(S)$, $\quad \{S\} \in \mathcal{P}(S)$, $\quad \{S\} \subset \mathcal{P}(S)$
7. $\{\spadesuit\} \subset S$, $\quad \{\spadesuit\} \in \mathcal{P}(S)$, $\quad \{\{\spadesuit\}\} \subset \mathcal{P}(S)$, $\quad \{\{\spadesuit\}\} \subset \{S\}$, $\quad \{\{\spadesuit\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$

Exercice 2

Considérons l'ensemble de lettres $X = \{a, e, k, m\}$. Remplace les $\dots$ par l'un des signes suivants :

$$=,\ \in,\ \subset,\ \ni,\ \supset \neq,\ \notin,\ \not\subset,\ \not\ni,\ \not\supset.$$

Parfois plusieurs réponses sont possibles. Essaie toujours d'utiliser un signe non barré si c'est possible.

1. $\{a, e\} \dots X$, $\quad \{a\} \dots X$, $\quad a \dots X$, $\quad X \dots m$, $\quad z \dots X$, $\quad X \dots \{z\}$
2. $\{e, k\} \dots \{k, y, l, e\}$ $\quad \{e\} \dots \{l\}$, $\quad X \dots \emptyset$, $\quad X \dots X$, $\quad \{l, m\} \dots \{l, j\}$
3. $a \dots a$, $\quad a \dots e$, $\quad \{a, e, k, m, e\} \dots X$, $\quad \{k, e, a, m\} \dots \{e, a, k, m\}$
4. $X \dots \mathcal{P}(X)$, $\quad \{k, q\} \dots \mathcal{P}(X)$, $\quad \{m, a\} \dots \mathcal{P}(X)$, $\quad a \dots \mathcal{P}(X)$
5. $\{\{a\}, \{e\}, \{k, m\}\} \dots \mathcal{P}(X)$, $\quad \{\{a\}, \{e\}, \{k, n\}\} \dots \mathcal{P}(X)$, $\quad \{X, \{a, m\}\} \dots \mathcal{P}(X)$
6. $\{\{e\}\} \dots \mathcal{P}(X)$, $\quad \{\{e, k\}, \{e\}\} \dots \mathcal{P}(\{e, k\})$, $\quad \{\{a\}, \{e\}, \{k, m\}\} \dots \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$

Exercice 3

Démontre les affirmations suivantes.

1. Il existe un unique ensemble vide.
   (Indication : Suppose que X et Y soient des ensembles vides selon la définition du cours. Montre que $X = Y$ en utilisant la définition de l'égalité d'ensembles donnée au cours.)

2. Pour tout ensemble X, $\emptyset \subset X$. (*Utilise la définition de l'inclusion d'ensembles.*)
3. Pour tout ensembe X, $X \subset X$. (*Utilise la définition de l'inclusion d'ensembles.*)

Exercice 4

Détermine l'intersection des ensembles X, Y (et Z s'il apparaît). Rappelons que $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers positifs *et* négatifs.

1. $X = \mathbb{N}$ et $Y = \{3,8;-4;9\}$.
2. $X = \{$villes suisse$\}$ et $Y = \{$Genève, Milan, Barcelone, Berne$\}$.
3. $X = \{$nombres naturels pairs$\}$ et $Y = \{$nombres naturels impairs$\}$.
4. $X = \mathbb{N}$ et $Y = \{$nombres naturels pairs$\}$.
5. $X = \{$élèves de la classe du cours Euler$\}$ et
$Y = \{$habitants de Suisse ayant moins de 20 ans$\}$.
6. $X = \{$villes francophones$\}$, $Y = \{$villes non européennes$\}$,
$Z = \{$Genève, Québec, Paris, Dakar, Münich$\}$.
7. $X = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, \text{Il existe } m \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = m^2\}$ et $Y = \mathbb{N}$.

Exercice 5

Détermine la réunion des ensembles X, Y (et Z s'il apparaît).

1. $X = \{$villes suisse$\}$ et $Y = \{$Genève, Milan, Barcelone, Berne$\}$.
2. $X = \{$nombres naturels pairs$\}$ et $Y = \{$nombres naturels impairs$\}$.
3. $X = \mathbb{N}$ et $Y = \{$nombres naturels pairs$\}$.
4. $X = \{$élèves de la classe du cours Euler$\}$ et
$Y = \{$habitants de Suisse ayant moins de 20 ans$\}$.
5. $X = \{$villes francophones$\}$, $Y = \{$villes non européennes$\}$,
$Z = \{$Genève, Québec, Paris, Dakar, Münich$\}$.
6. $X = \mathbb{N}$ et $Y = \{$nombres entiers négatifs$\}$.

Exercice 6

Considérons l'ensemble de lettres $X = \{a, e, k, m\}$. Pour chaque paire d'ensembles, détermine son intersection et sa réunion.

1. $\{a, e\}$ et X, $\{a\}$ et X, X et $\{z\}$, $\{k, m, d, o\}$ et X, $\{k, e, a, m\}$ et $\{e, a, k, m\}$.

2. $\{e, k\}$ et $\{k, y, l, e\}$ $\{e\}$ et $\{l\}$, X et $\emptyset$, X et X, $\{l, m\}$ et $\{l, j\}$.

3. $\{\{a\}, \{e\}, \{k, m\}\}$ et $\{a\}$, $\{\{a\}, \{e\}, \{k, m\}\}$ et $\{\{a\}\}$, $\{\{a\}, \{e\}, \{k, m\}\}$ et $\{X\}$.

Exercice 7

Vrai ou faux ? Dans chacun des cas suivants dis si l'affirmation est vraie ou fausse. Explique brièvement pourquoi (en donnant un contre-exemple explicite lorsque l'affirmation est fausse).

1. Les ensembles des mammifères et celui des animaux volants sont des ensembles disjoints.
2. Le diagramme de Venn du complément et de la différence sont identiques.
3. Si $X, Y \subset \mathbb{N}$, alors $X \cap Y$ n'est jamais vide.
4. Si $X, Y \subset \mathbb{N}$, alors $X \cup Y \subset \mathbb{N}$.

Exercice 8

Détermine la différence $X - Y$ des paires d'ensembles suivantes

1. $X = \mathbb{N}$ et
   a) $Y = \{$nombres naturels multiples de $2\}$,
   b) $Y = \{$nombres entiers négatifs$\}$.
2. $X = \{a, b, p, l, z\}$ et
   a) $Y = \{z, p\}$,
   b) $Y = \{e, a, d\}$,
   c) $Y = \{u, i, o\}$,
   d) $Y = X$,
   e) $Y = \emptyset$.
3. Détermine le complément des sous-ensembles A de l'ensemble $X = \{$habitants de Lausanne$\}$ avec :
   a) $A = \{x \in X \,|\, x$ parle français et russe$\}$,
   b) $A = \{x \in X \,|\, x$ parle français ou russe$\}$,
   c) $A = \{x \in X \,|\, x$ parle ni français ni russe$\}$.
4. Détermine le complémentaire du sous-ensemble $A \subset X$ d'un ensemble X. On demande une description du type $A^c = \{x \in X \mid \ldots\}$. Ici R et S sont des affirmations concernant les éléments x de X.
   a) $A = \{x \in X \,|\, R$ est vraie$\}$,
   b) $A = \{x \in X \,|\, R$ et S est vraie$\}$,
   c) $A = \{x \in X \,|\,$ non R est vraie$\}$.

Exercice 9

Attention aux parenthèses !

1.1 Le compte est toujours bon

But : Atteindre le nombre « cible » en utilisant une ou plusieurs fois les opérations + ; − ; × ; : et une fois au maximum chacun des nombres à disposition.

Nombre «cible»	Nombres à disposition					
32	2	3	4	6	7	10
170	1	2	3	4	5	6
37	2	4	6	7	8	10
41	1	3	5	7	9	11
785	7	10	11	15	20	30
116	1	5	7	9	12	19
115	5	7	9	20	25	3

Exercice 10

Effectue sur la donnée l'exercice suivant :

27.1 Entraînement

Pour atteindre la sortie de ce labyrinthe, effectue le calcul de la case sur laquelle tu te trouves, puis cherche la réponse parmi les cases qui l'entourent.

entrée

51 $42 : 3$	**84** $17 \cdot 3$	**46** $7 \cdot 2$	$7 \cdot 8$	**42** $28 \cdot 2$	**23** $14 \cdot 4$	**84** $17 \cdot 3$	**13** $7 \cdot 3$
127 $13 \cdot 11$	**14** $13 \cdot 9$	**56** $12 \cdot 7$	**36** $6 \cdot 2$	**48** $4 \cdot 8$	**56** $13 \cdot 5$	**99** $14 \cdot 3$	**22** $11 \cdot 8$
137 $46 \cdot 2$	**117** $9 \cdot 8$	**94** $12 \cdot 6$	**12** $13 \cdot 6$	**32** $11 \cdot 7$	**77** $6 \cdot 9$	**54** $11 \cdot 9$	**88** $15 \cdot 3$
56 $10 \cdot 7$	**92** $11 \cdot 110$	**72** $10 \cdot 11$	**110** $4 \cdot 8$	**117** $4 \cdot 15$	**77** $5 \cdot 12$	**58** $5 \cdot 6$	**91** $4 \cdot 7$
14 $7 \cdot 6$	**107** $2 \cdot 47$	**1100** $3 \cdot 14$	**52** $4 \cdot 12$	**64** $11 \cdot 9$	**60** $12 \cdot 4$	**36** $5 \cdot 7$	**15** $5 \cdot 8$
60 $9 \cdot 8$	**88** $2 \cdot 26$	**84** $4 \cdot 22$	**88** $7 \cdot 12$	**48** $11 \cdot 8$	**98** $9 \cdot 9$	**45** $8 \cdot 9$	**91** → sortie
52 $13 \cdot 7$	**117** $2 \cdot 47$	**52** $6 \cdot 14$	**84** $6 \cdot 7$	**35** $5 \cdot 17$	**72** $9 \cdot 9$	**81** $9 \cdot 5$	**45** $13 \cdot 7$
91 $14 \cdot 7$	**12** $6 \cdot 9$	**54** $12 \cdot 1$	**42** $8 \cdot 8$	**64** $6 \cdot 12$	**78** $11 \cdot 5$	**55** $11 \cdot 10$	**101** $8 \cdot 7$

Exercice 11

Rappel : si x est un nombre quelconque et n un nombre naturel non nul,

$$x^n = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ fois}}.$$

Dans le cas où $n = 0$, on pose $x^0 = 1$ quel que soit x.

Le système de numération décimal (ou en base dix) que nous utilisons nous vient des indiens via les arabes. Nous représentons tous les nombres entiers naturels à l'aide de dix signes, appelés chiffres :

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Le système décimal est un système de position. En première position de l'écriture décimale d'un nombre apparaissent les unités ($1 = 10^0$), puis les dizaines ($10 = 10^1$), les centaines ($100 = 10^2$), les milliers ($1000 = 10^3$), etc. en allant de droite à gauche.

Ainsi l'écriture 485 signifie que c'est le nombre qui a 5 unités, 8 dizaines et 4 centaines. Autrement dit,

$$485 = 5 \cdot 1 + 8 \cdot 10 + 4 \cdot 100 = 5 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^2.$$

En fait, on a choisi les puissances de 10 parce que c'est pratique pour nous : nous avons dix doigts pour compter. Mais on pourrait très bien choisir les puissances d'un autre nombre. Par exemple, les ordinateurs ne savent compter que jusqu'à deux. Dans un ordinateur tout est codé par des 0 et des 1. Comment ? En écrivant les nombres en base deux.

On procède de la même manière qu'en base dix. On n'a besoin que de deux chiffres 0 et 1 et on utilise la position pour indiquer dans quelle puissance de 2 on se trouve. Par exemple en base deux, le nombre 1101 signifie

$$1101 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3.$$

Il s'agit donc du nombre treize. Les nombres zéro, un, deux, trois, quatre s'écrivent donc ainsi en base deux : 0, 1, 10, 11, 100.]

1. Ecris en base deux les nombres suivants (écrits en base dix) : 5, 8, 10, 16, 32, 64, 31, 33, 1024.
2. Ecris en base dix les nombres suivants (écrits en base deux) : 111, 1000, 1010, 100000, 10111.
3. Combien de chiffres différents a-t-on besoin pour écrire les nombres en base seize ? Complète les chiffres $0, 1, \ldots, 9$ par suffisamment de lettres de l'alphabet $a, b, c, \ldots$ (dans l'ordre alphabétique) pour avoir le bon nombre de chiffres. Ecris les nombres deux, seize, dix-dept, trente-deux, soixante-quatre, cent en base seize. Qu'est-ce que le nombre c8 en base dix ?
4. En informatique, un bit est une valeur 0 ou 1. Un octet (byte en anglais) est une suite de 8 bits. Par exemple 00110111 est un octet et 00101111 est un octet différent. On utilise les octets pour coder les symboles typographiques (les lettres de l'alphabet et tous les signes comme la ponctuation et autres). Si chaque octet possible code un symbole, combien de symboles différents peut-on coder avec tous les octets possibles ?
5. On peut aussi stocker d'autres sortes d'information avec les octets, comme par exemple des images. Pour coder une photo de bonne qualité, il faut facilement 1 mégabyte. Cela veut dire un million d'octets. Supposons que tu devais écrire toute la suite de 0 et de 1 qui code la photo dans un livre. Dans ce livre, tu peux écrire 25 caractères par ligne et 40 lignes par page. Combien de pages vas-tu remplir pour écrire tous les bits qui codent la photo ?

Exercice 12

Démontre la Proposition 2.6 (5) du cours : $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$. Dessine le diagramme de Venn en hachurant le sous-ensemble concerné.

Exercice 13

Donne la liste des éléments des ensembles suivants.

1. $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$.
2. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))$.
3. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.
4. D'après ces exemples, si un ensemble X a n éléments, combien d'éléments aura $\mathcal{P}(X)$? Arrives-tu à justifier ce résultat général ?

Exercice 14

6. Hommage à Guillaume

En face de chaque opération, tu découvres un « morceau » de phrase.

La réponse de chaque opération te permet de décoder la suite du texte de la manière suivante : il suffit de chercher, dans la liste, un calcul dont le premier nombre est le résultat que tu as obtenu.

La première étape donne :

$(100 \cdot 4) : 8 = 50$	**Sous le pont**
$[(260 - 8) : 9] + (13 \cdot 2) = \ldots$	**vienne la nuit**
$(34 - 3) \cdot 8 = \ldots$	**le pont de**
$[(19 + 203) - 144] - 73 = \ldots$	**le la Seine e**
$(729 + 15) - 14 = \ldots$	**les mains re**
$[50 + (5 \cdot 9)] : 5 = \ldots$	**Mirabeau cou**
$[(61 - 17) : 4] + 968 = \ldots$	**vie est lente**
$10'000 - 9823 = \ldots$	**nne l'heure Les jours**
$(62 \cdot 5) - 7 = \ldots$	**urante L'amour s'en va**
$(504 : 7) + 1 = \ldots$	**ie venait toujours**
$(2 \cdot 37) + (3 \cdot 37) = \ldots$	**les jours s'**
$(185 \cdot 2) - 46 = \ldots$	**en vont je demeure**
$[(5^3 - 80) : 3] + 22 = \ldots$	**t nos amours f**
$54 : (3 \cdot 9) = \ldots$	**sonne l'heure**
$(248 - 89) - 21 = \ldots$	**nos bras passe**
$[(43 + 1) : 11]^3 - 2 = \ldots$	**comme cette eau co**
$(215 - 15) \cdot 50 = \ldots$	**vienne la nuit so**
$177 + [(40 + 1) + 56] = \ldots$	**s'en vont je dem**
$(324 : 4) \cdot 9 = \ldots$	**les mains dans**
$(730 + 8) : 9 = \ldots$	**stons face à face**
$1000 : 8 = \ldots$	**l'espérance est violente**
$979 + 21 = \ldots$	**et comme**
$138 : 3 = \ldots$	**des éternels r**
$[37 - (10 \cdot 3)] \cdot 9 = \ldots$	**aut-il qu'il**
$[(63 : 21) - 2] \cdot 504 = \ldots$	**m'en souvienne la jo**
$(46 - 3) \cdot 5 = \ldots$	**egards l'onde si lasse**
$(303 + 2) : 5 = \ldots$	**comme la**
$(73 - 8) \cdot 4 = \ldots$	**après la peine**
$[(82 - 7) + 27] : 3 = \ldots$	**tandis que sous**
$[(274 - 19) - 223)] + 11 = \ldots$	**eure L'amour s'en va**
$125 \ldots$	**...**

Guillaume Apollinaire (1880-1918)

Né à Rome, de mère slave à la personnalité forte et autoritaire et de père dont l'identité est incertaine (peut-être un officier italien, peut-être un évêque monégasque), Guillaume Apollinaire était de cette génération sacrifiée – encore qu'il fut un engagé volontaire – qui allait endurer mille morts dans les tranchées de la Première Guerre mondiale.

D'une nature sensible, fantasque et non dénuée d'un certain romantisme, il aura eu le temps, durant sa courte vie, de faire des rencontres éblouissantes, d'avoir des amis parmi tous ceux qui comptaient dans le monde des arts et de la littérature de la Belle Epoque : entre autres, les écrivains Alfred Jarry, Max Jacob, Blaise Cendrars et les peintres Picasso, Dufy, Marie Laurencin, Henri Rousseau, dit le Douanier.

Son fameux recueil *Alcools* valut à Apollinaire un regain de notoriété. Publié en 1913 avec un portrait de l'auteur par Picasso, il était constitué d'une série de poèmes sans ponctuation, innovation qui n'était peut-être même pas intentionnelle, mais qui fit grand bruit.

Engagé volontaire dès la fin de 1914, il venait d'obtenir la nationalité française quand, au bois des Buttes, le 17 mars 1916, il fut blessé à la tête par un éclat d'obus. Sa blessure n'acheva jamais de se guérir. Affaibli, il ne résista pas à une épidémie qui sévit à la fin de la guerre et mourut le 9 novembre 1918.

Des amis et connaissances ont rapporté que le jour de son enterrement, soit le lendemain ou le surlendemain de l'armistice, on entendait crier dans Paris et – ironie du sort – jusque sous les fenêtres d'Apollinaire : « A bas Guillaume ! », évidemment à l'adresse du Kaiser Guillaume II, considéré comme le seul fauteur de guerre, et non à l'adresse du poète.

Sources :

A. Billy, *Guillaume Apollinaire*, Ed. Seguers, coll. « Poètes d'aujourd'hui »

L'enterrement d'Apollinaire, émission de France Culture, avec la voix de Blaise Cendrars, 1990.

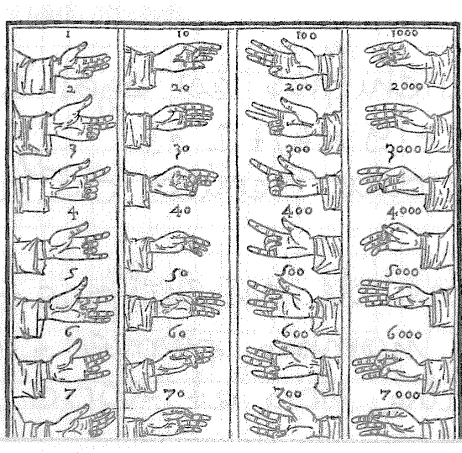
Exercice 15

Il existe des systèmes de numération qui ne sont pas des systèmes de position, comme tu vas le découvrir dans cet exercice. Cet exercice ne sera pas corrigé.

Voici quatre nombres écrits dans différents systèmes de numération :

Numération décimale (actuelle)	17	40	364	2585
Numération égyptienne (–3000)	𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	𓎆𓎆𓎆𓎆	𓍢𓍢𓍢𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺	𓆼𓆼𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺
Numération romaine (–50)	XVII	XL	CCCLXIV	MMDLXXXV
Numération grecque (–500)	ΔΓΙΙ	ΔΔΔΔ	ΗΗΗ𐅄ΔΙΙΙΙ	ΧΧ𐅅𐅄ΔΔΔΓ
Numération binaire	10001	101000	101101100	101000011001

Ecris, dans chacun de ces systèmes, les nombres : 8 ; 73 ; 336 ; 1540.



Numération par les doigts
Un système de numération par les doigts s'est répandu dès le haut Moyen Age. Cette façon de représenter les nombres facilitait notamment la mémorisation des reports lors des opérations effectuées mentalement.

Exercice 16

Et pour se détendre un peu, un problème tiré du livre “Big Book of Brain Games”. Quel est l'animal qui manque ?