Cours Euler: Mini-série 3

le 6 septembre 2017

Exercice 1

2. Sommes et quotient

Choisis quatre chiffres différents et calcule leur somme (s_1).

Calcule également la somme (s_2) de tous les nombres entiers que tu peux former en utilisant à chaque fois ces quatre chiffres.

Calcule le quotient de s_2 par s_1.

Essaie avec une autre série de 4 chiffres. Que remarques-tu ? Peux-tu expliquer ce phénomène ?

Exercice 2

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ? Justifie ta réponse en donnant un contre-exemple explicite si l'affirmation est fausse.

1. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq n$.
2. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $m \leq n$.
3. Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$.
4. Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$.

Exercice 3

Deux petites démonstrations. (1) Démontre que pour un ensemble X, l'ensemble des parties $\mathcal{P}(X)$ muni des opérations de réunion et d'intersection est un semi-anneau commutatif. Tu peux utiliser les TOUTES les propositions du cours sur les ensembles, même celles que nous n'avons pas démontrées !, pour ta preuve.

(2) Démontre, en utilisant la définition du cours de « plus petit » et « divise », que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, si $m \mid n$ et $n^{\neg} \neq 0$, alors $m \leq n$.

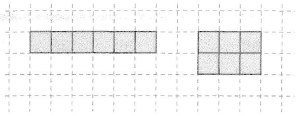
Exercice 4

Pour les paires ou triples de nombres suivants, donne une liste (notation ensembliste avec accolades) des multiples de chaque nombre de sorte qu'au moins deux multiples communs non nuls apparaissent. Donne alors la liste des multiples communs et identifie le ppmc dans cette liste. Représente ces ensembles sous forme de bulles (diagramme de Venn) comme dans le cours. Chaque fois qu'il y a une zone vide, explique pourquoi elle est vide.

1. 10 et 6
2. 7 et 13
3. 5 et 25
4. 4, 5 et 6
5. 4, 8 et 24

Exercice 5

On peut arranger six carrés en rectangles, de deux façons différentes, comme ceci :



De combien de façons différentes peut-on arranger 1024 carrés ?

Exercice 6

Un problème de test, 2016 (30 points = 7 + 4 + 3 + 3 + 3 + 5 + 5)

(1) On considère trois sous-ensembles A, B et C d'un ensemble X. Dans un diagramme de Venn représente en hachuré le sous-ensemble $[(A \cap B) - C] \cup [C - B]$.

(2) On considère l'ensemble $X = \{$ Berset, Burkhalter, Leuthard, Parmelin $\}$ formé par quatre de nos conseillers fédéraux qui doivent faire des équipes de deux pour jouer à la pétanque. On ne demande pas de justification.

(A) Donne la liste de tous les éléments de $\mathcal{P}(X)$ qui sont constitués exactement de deux éléments. Tu peux utiliser des abréviations, par exemple "Be" pour Berset, etc.
(B) Combien y a-t-il d'éléments dans $\mathcal{P}(X)$?
(C) L'affirmation $\{\{\text{Berset, Parmelin}\}, \{\text{Parmelin, Leuthard}\}, \{\text{Burkhalter}\}\} \subset \mathcal{P}(X)$ est-elle vraie ou fausse ?
(D) L'affirmation $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$ est-elle vraie ou fausse ?

(3) On considère deux sous-ensembles de $\mathbb{N}$. Le sous-ensemble P est celui des nombres pairs, T celui des multiples de 3.
(A) Explique pourquoi $(\mathbb{N} - P) - T \subset \mathbb{N} - (P - T)$.
(B) Explique pourquoi $\mathbb{N} - (P - T) \not\subset (\mathbb{N} - P) - T$ en donnant un contre-exemple explicite.

Exercice 7

Un autre problème de test, 2016 (25 points = 20 + 5) Le 14 septembre j'arrive à l'EPFL le matin et je vois passer un ramoneur. Il me dit qu'il vient tous les 15 jours pour ramoner les cheminées. A midi je choisis un plat dans une roulotte libanaise qui passe à l'EPFL tous les 12 jours. En attendant le début des cours je lis une revue scientifique qui paraît tous les 16 jours.

Dans combien de jours pourrais-je vivre au plus vite la même combinaison "ramoneur-plat libanais-revue scientifique" ?

Bonus. (5 points) Sur quel jour, mois, année cela tombera-t-il ? Et si je veux revivre cette expérience un mercredi, combien de jours dois-je attendre ?