



Fig. 129



Fig. 130

223. On donne un point P par ses coordonnées x, y, z par rapport à un repère orthonormal $Oxyz$. Exprimer la distance MP en fonction de ces coordonnées. On donne un système de points P par ses coordonnées (x, y, z) . Exprimer la distance MP .

224. On donne un point P par ses coordonnées x, y, z par rapport à un repère orthonormal $Oxyz$. Exprimer la distance MP en fonction de ces coordonnées. On donne un système de points P par ses coordonnées (x, y, z) . Exprimer la distance MP .

225. On donne un point P par ses coordonnées x, y, z par rapport à un repère orthonormal $Oxyz$. Exprimer la distance MP en fonction de ces coordonnées. On donne un système de points P par ses coordonnées (x, y, z) . Exprimer la distance MP .

226. On donne un point P par ses coordonnées x, y, z par rapport à un repère orthonormal $Oxyz$. Exprimer la distance MP en fonction de ces coordonnées. On donne un système de points P par ses coordonnées (x, y, z) . Exprimer la distance MP .

227. On donne un point P par ses coordonnées x, y, z par rapport à un repère orthonormal $Oxyz$. Exprimer la distance MP en fonction de ces coordonnées. On donne un système de points P par ses coordonnées (x, y, z) . Exprimer la distance MP .

228. On donne un point P par ses coordonnées x, y, z par rapport à un repère orthonormal $Oxyz$. Exprimer la distance MP en fonction de ces coordonnées. On donne un système de points P par ses coordonnées (x, y, z) . Exprimer la distance MP .

229. On donne un point P par ses coordonnées x, y, z par rapport à un repère orthonormal $Oxyz$. Exprimer la distance MP en fonction de ces coordonnées. On donne un système de points P par ses coordonnées (x, y, z) . Exprimer la distance MP .

230. On donne un point P par ses coordonnées x, y, z par rapport à un repère orthonormal $Oxyz$. Exprimer la distance MP en fonction de ces coordonnées. On donne un système de points P par ses coordonnées (x, y, z) . Exprimer la distance MP .

231. On donne un point P par ses coordonnées x, y, z par rapport à un repère orthonormal $Oxyz$. Exprimer la distance MP en fonction de ces coordonnées. On donne un système de points P par ses coordonnées (x, y, z) . Exprimer la distance MP .

CHAPITRE 10

POLYÈDRES RÉGULIERS

Dans ce chapitre, même lorsqu'on ne le précise pas, les polyèdres considérés sont toujours bornés et finis; autrement dit, chacun d'eux peut être contenu dans une boule et il a un nombre fini de sommets, d'arêtes et de faces.

Le nombre d'Euler

Nous consacrons ce chapitre à l'un des plus beaux résultats de la géométrie classique grecque. Nous ne l'établirons pas à la manière des Anciens. Nous nous servirons d'un résultat dû au grand mathématicien bâlois Léonard Euler (1707-1783). Il avait remarqué, comme tout le monde, que lorsque le nombre des faces d'un polyèdre croît, il en est de même du nombre des arêtes et des sommets. Mais il avait constaté qu'ils ne croissaient pas n'importe comment. Nous verrons bientôt sur quelles expériences il s'est probablement appuyé pour découvrir le théorème.

Soit Ω la surface frontière d'un polyèdre convexe fini Π . Désignons par F le nombre de ses faces, par A le nombre de ses arêtes et par S celui de ses sommets. Considérons alors l'expression $(F-A+S)$ et calculons sa valeur pour quelques polyèdres bien connus: le tétraèdre, le parallélépipède et un tronc de pyramide à bases hexagonales parallèles. Nous trouvons successivement:

$$\begin{aligned} 4 - 6 + 4 &= 2 \\ 6 - 12 + 8 &= 2 \\ 8 - 18 + 12 &= 2 \end{aligned}$$

La conjecture est que, pour les polyèdres convexes finis, $(F-A+S)$ égale constamment 2. Nous allons esquisser une preuve assez élémentaire.

L'idée principale est de partir de la frontière Ω d'un polyèdre convexe fini et borné quelconque Π , d'y ôter des sommets et des arêtes de manière à diminuer le nombre de ses faces, de constater que le nombre $(F-A+S)$ reste inchangé, jusqu'au moment où on aboutit à une figure très simple pour laquelle on constate que ce nombre est 2. Afin de nous faciliter la tâche, nous allons présenter la surface Ω du polyèdre sous une forme commode. Dans un premier temps, nous allons considérer que la surface Ω est réalisée en caoutchouc et que nous pouvons la gonfler comme un ballon de plage. Elle devient alors une sphère. Chaque sommet de Ω est transformé en un point de la sphère; chaque

arête de Ω devient en un arc simple reliant deux de ces points; chaque face se présente maintenant comme une région simple entourée de sommets et d'arêtes sur la sphère. Nous appellerons encore ces points des «sommets», ces arcs des «arêtes» et ces régions des «faces». Au cours du gonflage leur nombre n'a pas changé et nous pourrions calculer $(F-A+S)$ sur ce ballon sphérique. La figure 128 montre le résultat obtenu avec un tétraèdre (fig. 128 a) et avec un cube ou un parallélépipède (fig. 128 b).

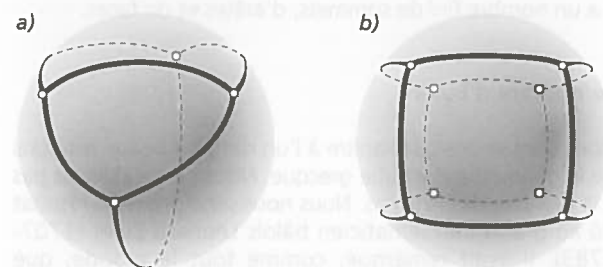


Fig. 128

Mais nous allons encore simplifier les choses. Choisissons une face sur la sphère. Faisons-y un trou rond sans toucher aucune arête. Puis étirons le reste de la sphère – qui est en excellent caoutchouc – de manière à former une feuille plane. Les sommets restent des points. Les arêtes sont des courbes planes simples allant d'un sommet à un autre. Les faces deviennent des régions planes simples à l'exception de la face que nous avons percée au début. Celle-ci devient la partie du plan qui entoure les autres faces.

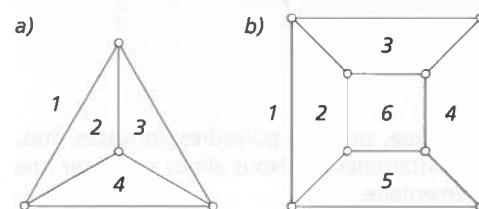


Fig. 129

La figure 129 a) montre ce qu'on obtient à partir d'un tétraèdre, la figure 129 b) à partir d'un cube ou d'un parallélépipède. Les arêtes sont dessinées sous forme de segments, mais on pourrait les représenter par des arcs de cercles ou d'autres arcs simples ne recoupant pas les autres arêtes. On obtient un résultat semblable en projetant la sphère sur un plan à partir d'un point non situé sur une arête. La figure 130 montre un parallélépipède «gonflé» en une sphère.

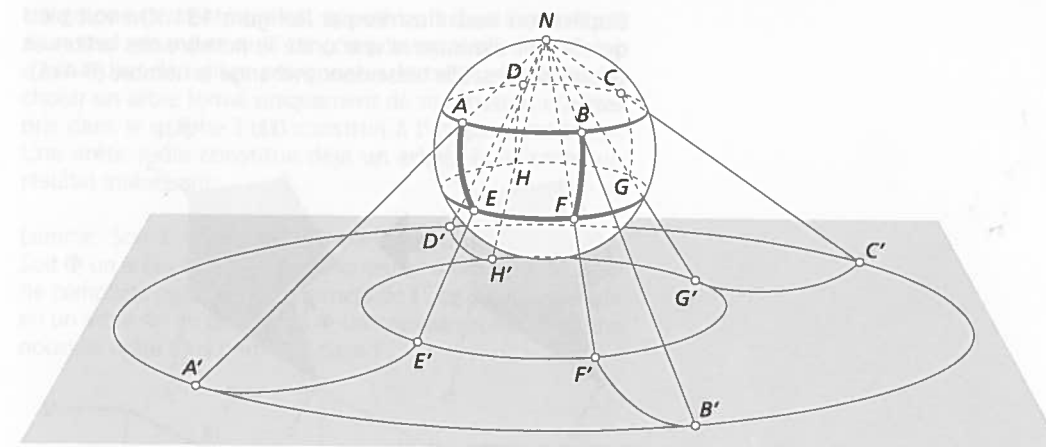


Fig. 130

On distingue sur celle-ci les sommets $A, B, \dots, H$ et les arêtes $AB, AE, \dots, GH$. Du pôle nord N choisi dans la face $ABCD$, on projette les huit sommets, les douze arêtes et les six faces sur un plan perpendiculaire au diamètre de la sphère passant par N . On voit apparaître un diagramme qui ressemble à celui de la figure 129 b). Les nombres de sommets, d'arêtes et de faces sont les mêmes. Il n'y a guère que les arêtes qui soient représentées par des arcs courbés.

Les sommets et les arêtes de la figure obtenue constituent un **graphe** géométrique plan. Nous dirons que c'est le «graphe de la surface polyédrique étudiée Ω » et nous le noterons $\Gamma(\Omega)$. Quel que soit le polyèdre convexe, borné et fini dont on part, le graphe de sa frontière Ω est d'un seul tenant. Cela signifie qu'on peut y cheminer d'un sommet à un autre, quels qu'ils soient, en suivant une ligne formée d'arêtes.

Nous allons maintenant décrire des simplifications de ce genre de graphes. A chaque étape, les nouveaux graphes obtenus seront du même type, à un détail près: il pourra arriver qu'un sommet appartienne à deux arêtes seulement. Autrement dit, deux sommets voisins pourront être reliés par une ligne polygonale simple et non plus nécessairement par un segment. Cela n'aura pas d'inconvénients pour autant qu'on compte soigneusement les arêtes et les sommets. Donnons maintenant les deux opérations de base:

Opération I:

ôter une arête commune à deux faces différentes et réunir les deux faces considérées en une seule

Opération II:

ôter un sommet appartenant à une seule arête ainsi que cette arête.

L'opération I est illustrée par la figure 131. On voit bien qu'elle fait diminuer d'une unité le nombre des arêtes et celui des faces. Elle laisse donc inchangé le nombre $(F-A+S)$.

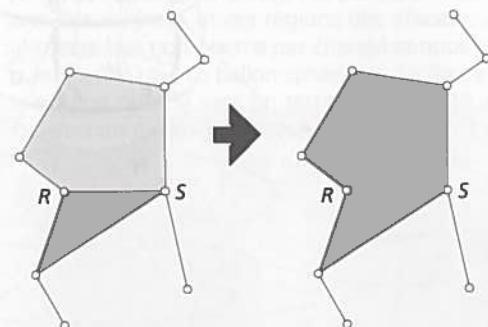


Fig. 131

Comme le montre la figure 131, l'application de la règle I peut faire apparaître un sommet R d'où ne partent que deux arêtes seulement. Quant à l'opération II, elle apparaît sur la figure 132. Le sommet V est un cul-de-sac. Il n'en part pas d'autre arête que UV . Si on enlève uniquement le sommet V et l'arête UV (mais pas le sommet U), on abaisse d'une unité le nombre des sommets et celui des arêtes. Donc on laisse inchangé le nombre $(F-A+S)$.

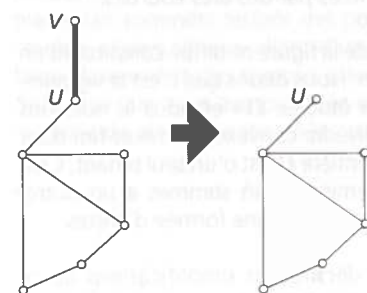


Fig. 132

On constate facilement que lorsqu'on applique les opérations I et II, le graphe formé par les sommets et les arêtes se simplifie, mais il reste toujours d'un seul tenant.

La suite du travail est évidente: on va ôter des faces, des arêtes et des sommets en appliquant les opérations I et II, jusqu'à ce qu'on obtienne un graphe si petit qu'on puisse calculer facilement le nombre $(F-A+S)$. On peut s'y prendre de beaucoup de manières. Mais nous allons en donner une qui conduit toujours à la même figure finale.

Un graphe géométrique est appelé un **arbre** lorsqu'il est d'un seul tenant et qu'il ne comporte pas de «boucles», c'est-à-dire de lignes polygonales fermées. Nous allons choisir un arbre formé uniquement de sommets et d'arêtes pris dans le graphe $\Gamma(\Omega)$ construit à l'étape précédente. Une arête seule constitue déjà un arbre. Établissons un résultat intéressant:

Lemme: Soit Γ un graphe géométrique d'un seul tenant. Soit Φ un arbre composé de sommets et d'arêtes de Γ . Si Φ ne comporte pas tous les sommets de Γ , on peut l'agrandir en un arbre Φ' en ajoutant à Φ un nouveau sommet et une nouvelle arête tous deux pris dans Γ .

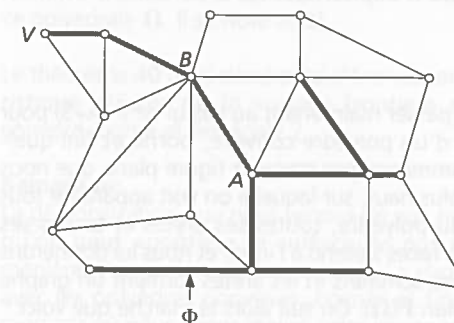


Fig. 133

Preuve. Puisque l'arbre Φ ne comporte pas tous les sommets de Γ , choisissons un sommet V de Γ n'appartenant pas à Φ . Le graphe Γ étant d'un seul tenant, on peut trouver une ligne polygonale formée d'arêtes de Γ reliant V à un sommet de Φ . Suivons cette ligne à partir de V et appelons B le dernier sommet de cette ligne qui n'appartienne pas à Φ . Le sommet suivant, A , appartient à Φ . Posons

$$\Phi' \equiv \Phi \cup AB.$$

Φ' est un arbre. En effet, l'arête AB ne peut pas créer de boucle puisque B n'appartient pas à Φ . Φ' répond à la condition posée. ■

Ce lemme nous apprend plusieurs choses. D'abord, il concerne tous les graphes finis d'un seul tenant, même s'ils ne proviennent pas d'une surface polyédrale. Ensuite, il nous donne un procédé simple pour construire des arbres de plus en plus grands dans le graphe (d'un seul tenant) Γ . On choisit une arête et on exécute la construction donnée par la preuve du lemme. Celui-ci implique que le procédé ne s'arrête que lorsque l'arbre obtenu comporte tous les sommets. Un tel arbre existe donc et on peut le construire puisque Γ est fini. On appelle **arbre maximal** dans le graphe Γ tout arbre formé d'arêtes de Γ et comportant tous les sommets de Γ . Enfin, soit Φ_m un arbre maximal du

graphe $\Gamma(\Omega)$. Les arêtes de $\Gamma(\Omega)$ qui n'appartiennent pas à Φ_m séparent des faces différentes. Si l'une de ces arêtes était bordée des deux côtés par la même face, il suffirait de l'ôter pour séparer le graphe en deux parties disjointes (voir figure 134). Or cela ne se peut pas puisque le reste du graphe contient l'arbre Φ_m qui comporte tous les sommets de $\Gamma(\Omega)$ et qui est d'un seul tenant.

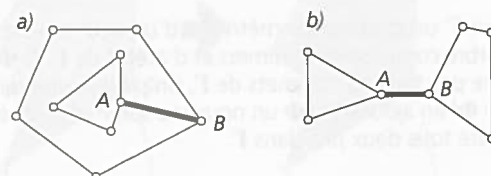


Fig. 134

Nous pouvons passer maintenant au calcul de $(F-A+S)$ pour la frontière Ω d'un polyèdre convexe, borné et fini quelconque. On commence par tracer la figure plane que nous avons décrite plus haut, sur laquelle on voit apparaître tous les sommets du polyèdre, toutes ses arêtes et toutes ses faces. L'une des faces s'étend à l'infini et nous lui donnerons le numéro 1. Les sommets et les arêtes forment un graphe géométrique plan $\Gamma(\Omega)$. On suit alors la marche que voici :

- On construit un arbre maximal Φ_m dans $\Gamma(\Omega)$.
- On exécute l'opération I successivement sur chacune des arêtes du graphe $\Gamma(\Omega)$ n'appartenant pas à l'arbre Φ_m . A l'issue de cette phase, il ne reste plus que l'arbre maximal Φ_m .
- On supprime l'une après l'autre toutes les arêtes de l'arbre Φ_m par le moyen de l'opération II. Au terme de cette opération, il ne reste plus qu'un sommet (qu'aucune opération autorisée ne nous permet de faire disparaître) et la face 1 qui a fini par envahir tout le plan.

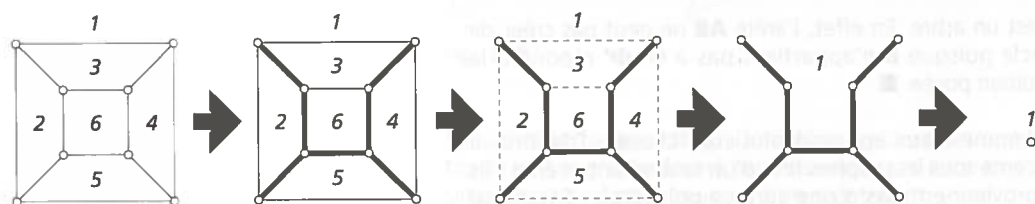


Fig. 135

La figure 135 montre le procédé appliqué au cube. Quel que soit le polyèdre convexe fini dont on part, on aboutit à cette figure: une face, aucune arête, un sommet. Dans ce cas, $(F-A+S)$ vaut 2. Or pendant toute la procédure, le nombre $(F-A+S)$ est resté constant.

Théorème 40



Théorème d'Euler

Soit F le nombre des faces, A le nombre des arêtes et S le nombre des sommets d'un polyèdre convexe fini. Le nombre $F-A+S$ égale 2.

Définition 48

Soit Ω la frontière d'un polyèdre fini. Si on désigne par F le nombre de ses faces, par A le nombre de ses arêtes et par S le nombre de ses sommets, le nombre $F-A+S$ est appelé le **nombre d'Euler** ou la **caractéristique d'Euler** de la surface polyédrale Ω . Il se note $\chi(\Omega)$.

Le théorème 40 peut donc aussi s'énoncer ainsi: la caractéristique d'Euler de la surface frontière d'un polyèdre convexe, borné et fini égale 2.

Remarque:

La démonstration que nous venons de voir repose sur le fait qu'on peut «gonfler» la surface de nos polyèdres à la manière d'un ballon de caoutchouc. La chose est possible avec les polyèdres convexes, bornés et finis. A partir du moment où nous avons réalisé cette image sphérique fidèle de la surface étudiée, nous n'avons plus fait usage de l'hypothèse de convexité. Il existe des polyèdres non convexes qui ont la même propriété. Mentionnons, par exemple, ceux qui sont tels que, d'un point bien choisi à l'intérieur, un observateur peut voir séparément tous les points de la frontière. Convenons ceci: soit P un polyèdre fini, soit Ω sa frontière et soit O un point intérieur de Π . Le polyèdre Π est dit **étoilé par rapport au point O** si, pour tout point P de la frontière Ω , le segment OP est contenu dans le polyèdre et il ne coupe sa frontière qu'en P . Un polyèdre convexe est étoilé par rapport à tous ses points intérieurs. Pour abrégé, nous dirons qu'un polyèdre est **étoilé** s'il admet un point intérieur O par rapport auquel il est étoilé. Il suffit qu'un polyèdre fini soit étoilé pour qu'on puisse lui appliquer les transformations et les opérations qui ont conduit au théorème d'Euler. Par suite:

Corollaire du théorème 40. Si Ω est la surface frontière d'un polyèdre étoilé fini, alors sa caractéristique d'Euler $\chi(\Omega)$ égale 2. ■

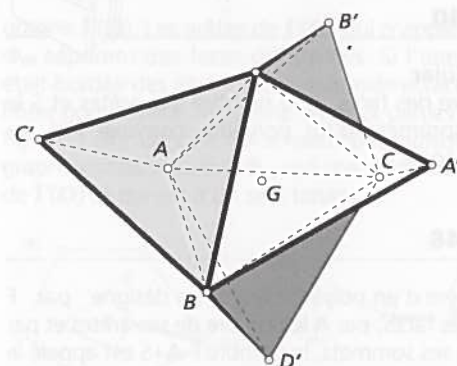


Fig. 136

Prenons comme exemple le polyèdre représenté à la figure 136. On l'obtient en composant un tétraèdre régulier $ABCD$ avec quatre tétraèdres égaux au premier posés sur ses quatre faces: $A'BCD$, $AB'CD$, $ABC'D$ et $ABCD'$. Le solide obtenu n'est pas convexe mais il est étoilé par rapport au barycentre Γ du premier tétraèdre. Il possède 12 faces, 18 arêtes et 8 sommets. Sa caractéristique d'Euler égale bien 2.

Il existe des polyèdres non étoilés dont la caractéristique d'Euler égale quand même 2. (Voir à ce sujet les exercices 216 et 217.)

Les solides platoniciens

Le théorème d'Euler a beaucoup d'applications en mathématiques. Nous allons nous en servir pour essayer de classer les polyèdres réguliers. Nous n'avons pas encore défini ces solides. Mais nous en avons des exemples: le cube, le tétraèdre et l'octaèdre réguliers. Quelles propriétés ont-ils en commun? Notons par exemple que:

- Ils sont bornés et finis.
- Ils sont convexes.
- Ils sont étoilés.
- Leurs faces sont des polygones réguliers.
- Leurs faces sont égales.
- Leurs faces ont le même nombre d'arêtes.
- Les figures formées par les faces issues d'un même sommet sont égales.
- Les figures formées par les faces issues d'un même sommet sont régulières (c'est-à-dire sont contenues dans la surface latérale d'une pyramide régulière).
- Chaque sommet appartient au même nombre de faces et au même nombre d'arêtes.

j) Chacun de ces solides est inscriptible dans une sphère. Nous allons retenir les conditions a), c), f) et i), et examiner les polyèdres qui y satisfont. Soit Π un polyèdre fini, borné et étoilé. Désignons par F le nombre de ses faces, A celui de ses arêtes et S celui de ses sommets. Compte tenu des hypothèses a) et c) et d'après le corollaire du théorème d'Euler, on peut écrire:

$$F - A + S = 2 \quad (1)$$

Conformément aux hypothèses f) et i), désignons par n le nombre des arêtes de chaque face de Π et par p le nombre des arêtes issues de chaque sommet. Le nombre n est aussi celui des sommets de chaque face et le nombre p est aussi celui des faces contenant un même sommet. On doit évidemment poser:

$$n > 2; p > 2 \quad (2)$$

Evaluons le nombre des sommets. On l'obtient en multipliant le nombre F des faces par le nombre n de sommets de chaque face; mais chaque sommet est compté autant de fois qu'il y a de faces qui le contiennent. Il faut donc diviser le produit Fn par p :

$$S = \frac{Fn}{p} \quad (3)$$

On peut aussi obtenir S en remarquant que chaque arête a un sommet à chacune de ses extrémités, mais qu'à nouveau chaque sommet est compté autant de fois qu'il y a d'arêtes qui en partent. D'où:

$$S = \frac{2A}{p} \quad (4)$$

De (3) et (4) on déduit:

$$A = \frac{Fn}{2} \quad (5)$$

Portons (4) et (5) dans (1):

$$F - \frac{Fn}{2} + \frac{Fn}{p} = 2 \quad (6)$$

En divisant les deux membres de (6) par Fn , on obtient:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{p} = \frac{2}{Fn}$$

qu'on peut écrire sous la forme:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{2}{Fn}$$

Fn étant un nombre strictement positif, on a:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{p} > \frac{1}{2} \quad (7)$$

On peut encore tirer de (6) l'expression de F en fonction de n et de p :

$$F = \frac{4p}{2p - np + 2n} \quad (8)$$

La relation (7) est au centre de la discussion. Elle n'admet que très peu de solutions en nombres entiers supérieurs à 2. On vérifie sans peine que le couple (n, p) ne peut prendre que les valeurs suivantes: (3;3), (3;4), (3;5), (4;3) et (5;3). Par exemple (4;4) ne convient pas, puisqu'un quart plus un quart n'est pas strictement supérieur à une demie. Le tableau 2 donne toutes les solutions du système formé par les relations (7), (8), (5) et (4). Les trois dernières permettent de calculer successivement F , A et S dès qu'on connaît n et p .

	n	p	F	A	S
Cas 1	3	3	4	6	4
Cas 2	3	4	8	12	6
Cas 3	3	5	20	30	12
Cas 4	4	3	6	12	8
Cas 5	5	3	12	30	20

Tableau 2

Le cas 1 est réalisé par le tétraèdre quelconque. Chacune de ses faces est un triangle et chaque sommet appartient à trois faces. On compte facilement les faces, les arêtes et les sommets; ils sont bien en nombres voulus. Le cas 2 est celui du parallélépipède. Mais nous nous intéressons aux polyèdres réguliers. Nous ne nous contenterons pas des seules conditions a), c), f) et i). Nous aimerions que les faces soient des polygones réguliers et que les figures formées par les faces ayant un sommet commun soient régulières (conditions e) et h)). Il est facile de constater que c'est bien le cas pour le tétraèdre régulier (fig. 137) et pour le cube (fig. 138).

Le solide régulier correspondant au cas 4 est l'**octaèdre régulier**. Il est facile à réaliser (voir figure 139). Choisissons un point O et trois droites d , e , f passant par O et perpendiculaires deux à deux. Une sphère de centre O et de rayon $p > 0$ coupe les droites d , e et f en trois paires de points antipodes A et A' , B et B' , C et C' . L'enveloppe convexe de ces six points comporte huit faces triangulaires dont toutes les arêtes ont une longueur de $\sqrt{2}p$. Ce sont des triangles équilatéraux. Les figures qu'ils forment en tous les sommets sont égales en vertu de toutes les symétries de la configuration initiale formée par la sphère et les trois droites d , e et f .

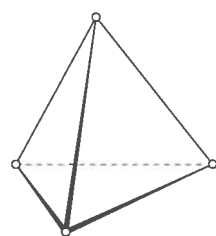


Fig. 137

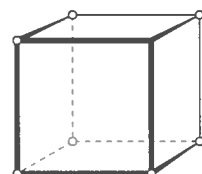


Fig. 138

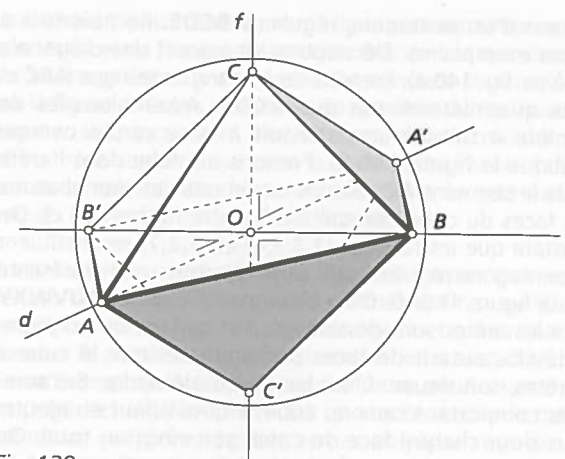


Fig. 139

On peut aussi construire un octaèdre régulier en formant l'enveloppe convexe des centres des faces d'un cube. De son côté, le cube s'obtient en prenant l'enveloppe convexe des barycentres des faces de l'octaèdre régulier. Ces deux solides sont en quelque sorte conjugués. On le devine dans le tableau 2 en comparant les cas 2 et 4.

On peut deviner que les cas 3 et 5 sont dans la même situation. Donnons d'abord la construction classique d'Euclide pour le cas 5, qui nous conduit au **dodécaèdre régulier** (dōdeka = douze en grec).

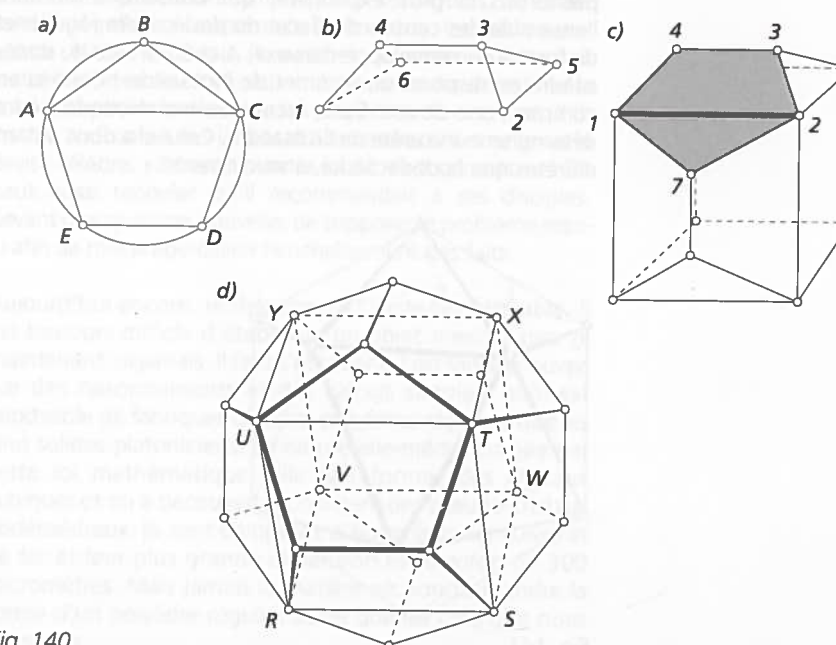


Fig. 140

Partons d'un pentagone régulier **ABCDE**. Recopions-le à douze exemplaires. Découpons-les suivant une diagonale **AC** (voir fig. 140 a). Prenons deux triangles tels que **ABC** et deux quadrilatères tels que **ACDE**. Assemblons-les de manière à former un petit toit à base carrée comme l'indique la figure 140 b). Prenons un cube dont l'arête égale le segment **AC**. Posons un tel petit toit sur chacune des faces du cube comme l'indique la figure 140 c). On constate que les facettes (1,2,3,4) et (1,2,7) reconstituent un pentagone régulier plan. Le solide obtenu est représenté par la figure 140 d). On y distingue le cube **RSTUVWXY** dont les arêtes sont dessinées sur la surface du polyèdre. Celui-ci a autant de faces pentagonales que le cube a d'arêtes, soit douze. C'est bien un dodécaèdre. Ses sommets comportent ceux du cube, à quoi il faut en ajouter deux pour chaque face du cube, soit vingt au total. On constate sans peine que le dodécaèdre a trente sommets.

Il est facile de voir que le dodécaèdre que nous avons obtenu est convexe, que ses faces sont des pentagones réguliers égaux et que les figures constituées par les faces en chaque sommet sont égales. On peut bien le qualifier de régulier. Nous n'irons pas plus loin dans la description de ce solide. Mais il faut rappeler que le nombre d'or joue un rôle important dans le pentagone régulier. Il en est donc de même dans le dodécaèdre régulier.

Il nous reste à montrer le cinquième solide convexe régulier: l'**icosaèdre régulier** (*eikosi*= vingt en grec). Il existe plusieurs manières de le construire. Par gain de temps, nous prendrons la plus expéditive, qui consiste à prendre l'ensemble des centres des faces du dodécaèdre régulier et de former son enveloppe convexe. A chaque face du dodécaèdre correspond un sommet de l'icosaèdre. Celui-ci en compte donc douze. Deux faces voisines du dodécaèdre déterminent une arête de l'icosaèdre. Celui-ci a donc autant d'arêtes que le dodécaèdre, à savoir trente.

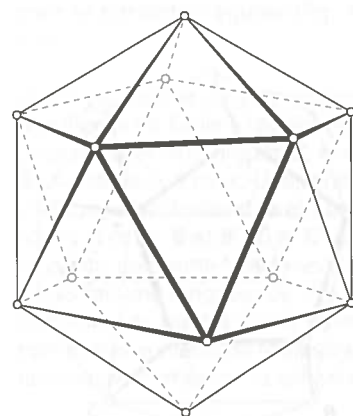
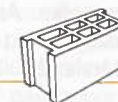


Fig. 141

Le tableau 2 nous montre, sur la ligne concernant le cas 3, que les faces de l'icosaèdre sont des triangles et que chaque sommet appartient à cinq faces. On constate tous ces faits sur la figure 141. Les propriétés de symétrie du dodécaèdre régulier se transportent immédiatement à l'icosaèdre. En effet, toute isométrie qui laisse le dodécaèdre invariant dans son ensemble fait de même avec la figure formée par les centres de ses faces, donc avec l'icosaèdre.

Il est facile de constater que les cinq solides que nous venons de décrire sont convexes, bornés et finis, qu'ils ont pour faces des polygones réguliers égaux et qu'en chaque sommet ils possèdent le même nombre de faces et d'arêtes. Ce sont ces propriétés que nous choisirons pour caractériser les polyèdres réguliers. Il est clair que toute similitude transforme un polyèdre régulier en un polyèdre régulier de même type. On peut énoncer:

Théorème 41



A similitude près, il existe en tout cinq polyèdres réguliers différents: le cube, le tétraèdre, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre réguliers.

Ces figures portent aussi le nom de **solides platoniciens**. Ils étaient déjà connus, semble-t-il, des pythagoriciens. Platon (427-347 av.- J.-C.) ne les a peut-être pas étudiés lui-même. Il en a laissé le soin à l'un de ses disciples mathématiciens, Théétète. Pour sa part, à la suite des pythagoriciens, il attribuait une signification symbolique à ces figures. Le dodécaèdre régulier correspondait à l'univers, les autres aux quatre éléments: l'eau (icosaèdre), la terre (cube), l'air (octaèdre) et le feu (tétraèdre). Il tenait en haute estime la science capable de découvrir les propriétés de ces corps. Il fit inscrire au fronton des jardins d'Academos où il enseignait la devise célèbre: «Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre». On peut aussi rappeler qu'il recommandait à ses disciples, devant une question nouvelle, de supposer le problème résolu afin de mieux apercevoir l'enchaînement des faits.

Aujourd'hui encore, le théorème 41 reste remarquable. Il est toujours difficile d'établir qu'un objet n'existe pas, ni maintenant, ni jamais. Il faut s'étonner qu'on sache prouver, par des raisonnements et des calculs simples, qu'il est impossible de fabriquer d'autres polyèdres réguliers que les cinq solides platoniciens. La nature elle-même est liée par cette loi mathématique. Elle sait former des cristaux cubiques et on a découvert récemment des pseudo-cristaux dodécaédraux. Ils sont composés d'aluminium, de cuivre et de fer et leur plus grande dimension est environ de 300 micromètres. Mais jamais la matière ne pourra prendre la forme d'un polyèdre régulier autre que les cinq que nous avons vus.

Les polyèdres semi-réguliers

Les polyèdres réguliers ont toujours exercé une grande fascination par leur élégance et peut-être un certain mystère. Mais il y en a peu. Les architectes, les sculpteurs, les joailliers ont cherché des formes presque aussi régulières, mais présentant plus de possibilités. C'est pourquoi les Anciens se sont intéressés à des polyèdres vérifiant des conditions de régularité un peu moins strictes que celles des solides platoniciens. On peut en rechercher dans plusieurs directions. Nous ne voulons ici que les suggérer.

La figure 136 nous montre un polyèdre dont les faces sont des triangles équilatéraux égaux. Il est étoilé mais il n'entre pas dans le tableau 2. On peut en déduire que ses sommets n'appartiennent pas tous au même nombre d'arêtes. En effet, certains d'entre eux appartiennent à six arêtes et d'autres à trois seulement. On peut donner d'autres exemples. Ainsi on peut partir d'un cube et coller sur chaque face une pyramide régulière à base carrée et à faces latérales équilatérales.

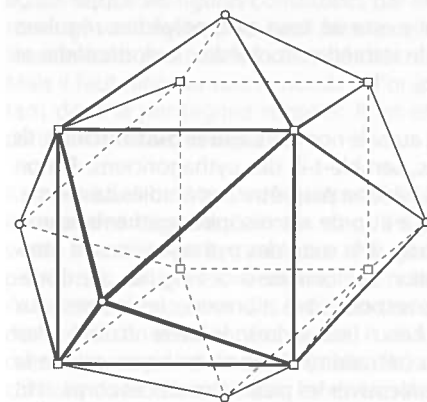


Fig. 142

Le solide obtenu est représenté à la figure 142. On y distingue le cube dont les sommets sont représentés par des points carrés. Ce polyèdre n'est pas régulier au sens étroit puisqu'il part six arêtes des sommets du cube et quatre des autres sommets. Néanmoins toutes ses arêtes sont égales ainsi que toutes ses faces. De plus il est convexe.

On peut trouver des polyèdres dont les faces - régulières - ne sont pas nécessairement égales, mais dont les arêtes sont égales et les figures des sommets peuvent être transformées les unes dans les autres par des isométries laissant le polyèdre invariant dans son ensemble. Les polyèdres platoniciens en sont évidemment des exemples. Mais il y en a d'autres. Nous en montrons trois à la figure 143. Le premier, figure 143 a), représente un **prisme** droit à bases polygonales régulières - ici des triangles équilatéraux - et à faces latérales carrées.

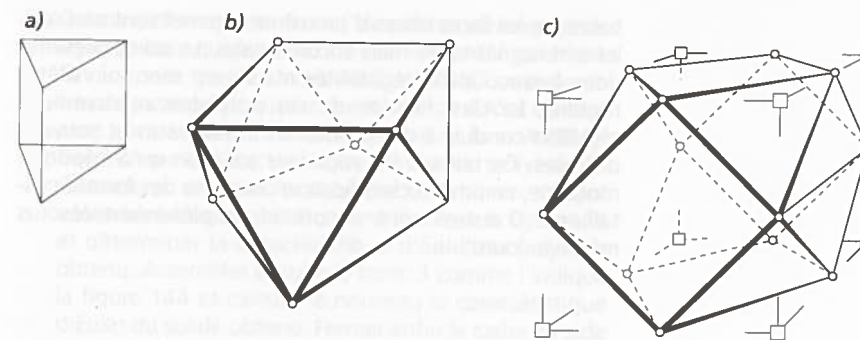


Fig. 143

Le deuxième, figure 143 b), est un **antiprisme**. Ses deux bases sont des polygones réguliers égaux inscrits dans des cercles de même axe. Ici nous avons choisi des carrés. Si ces bases ont n côtés, elles sont tournées l'une par rapport à l'autre d'un angle égal à $\frac{1}{n}$ tour complet. Dans notre exemple, l'une des bases a été tournée de 45° par rapport à l'autre. La distance des plans des bases est choisie de manière que les sommets des bases soient aussi ceux de $2n$ triangles équilatéraux. Dans notre cas, le solide obtenu a dix faces. Pour chaque nombre entier $n > 2$, on peut trouver un prisme et un antiprisme à arêtes toutes égales et dont les bases sont des n -gones.

Le troisième exemple, représenté sur la figure 143 c), vérifie les conditions mentionnées ci-dessus: ses arêtes sont égales, ses faces sont des polygones réguliers et les faces ayant un même sommet constituent des figures qui peuvent être transformées les unes dans les autres par des isométries laissant invariant le polyèdre dans son ensemble. Pourtant ce n'est ni un polyèdre platonicien, ni un prisme, ni un antiprisme. Le solide est alors dit **archimédien**. Il en existe treize de ce type. On peut tous les construire en retranchant d'un polyèdre régulier des morceaux bien choisis. Dans le cas présent, on part d'un cube et on considère l'enveloppe convexe des milieux de ses douze arêtes. La figure fait apparaître les sommets du cube initial sous forme de points carrés. Le polyèdre ainsi défini est le **cuboctaèdre**. Il a six faces carrées et huit en forme de triangles équilatéraux. Toutes ses arêtes sont égales. Il est assez facile de trouver les rotations qui transforment le solide en lui-même et qui envoient un sommet choisi sur n'importe quel autre. En outre, comme tous les autres polyèdres archimédiens, celui-ci est convexe.

On peut encore trouver bien d'autres polyèdres relativement réguliers. Ainsi le tétraèdre dont le développement est un triangle non équilatéral muni de ses trois lignes moyennes a ses quatre faces égales (mais non équilatérales). Comme on le constate facilement, les figures consti-

tuées par les faces issues d'un même sommet sont non seulement isométriques mais encore égales. Le solide présente donc beaucoup de régularités mais il est bien loin d'être régulier. La classification de ces polyèdres relativement réguliers conduit à des problèmes intéressants et souvent difficiles. Certains n'ont reçu leur solution qu'à l'époque moderne, comme la classification complète des formes cristallines. D'autres sont encore incomplètement résolus même aujourd'hui.

Exercices et problèmes du chapitre 10

213. On donne un cube $ABCA'B'C'D'$ où $ABCD$ est un carré et où les sommets opposés sont A et A' , B et B' , etc. Dessiner le solide obtenu par la réunion des tétraèdres réguliers $ACA'C'$ et $BDB'D'$. C'est la *stella octangula* de Képler. Déterminer le nombre d'Euler de ce solide à partir de la figure. (La *stella octangula* s'observe dans la nature sous la forme de certains assemblages cristallins.)
214. Existe-t-il un polyèdre convexe ayant cinq faces triangulaires? En existe-t-il un qui ait six faces triangulaires?
215. Imaginer un polyèdre dont un sommet appartienne à plus de faces que d'arêtes et un autre dont un sommet appartienne à plus d'arêtes que de faces.
216. On considère le polyèdre Π obtenu en réunissant un cube et ses symétriques par rapport à ses six faces. Déterminer directement sa caractéristique d'Euler $\chi(\Pi)$. Ce polyèdre est-il étoilé? Dessiner le graphe plan $\Gamma(\Pi)$. Y déterminer un arbre maximal. Evaluer la caractéristique d'Euler $\chi(\Pi)$ par la méthode présentée en démontrant le théorème 40.

217.

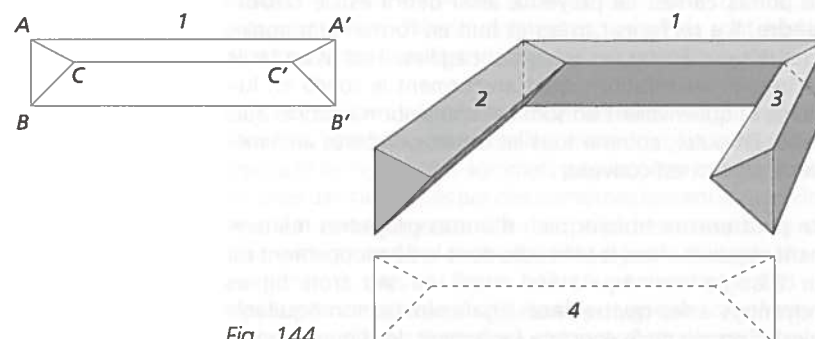


Fig. 144

On considère quatre troncs de prismes triangulaires égaux à celui qui porte le numéro 1 dans la figure 144. On suppose que les faces ABC et $A'B'C'$ sont symétriques par rapport au plan médiateur de AA' et qu'elles sont coupées à 45° relativement à la face $ABB'A'$. Déterminer la caractéristique d'Euler du polyèdre 1. Considérer ensuite le polyèdre obtenu en collant ensemble les troncs 1 et 2 comme l'indique la figure 144 et déterminer la caractéristique d'Euler du polyèdre obtenu. Assembler ensuite le tronc 3 comme l'indique la figure 144 et calculer à nouveau la caractéristique d'Euler du solide obtenu. Fermer enfin le cadre à l'aide du tronc 4 et déterminer sa caractéristique d'Euler. Donner une explication du phénomène observé.

218. Rappelons qu'un polyèdre Π est «composé» de deux polyèdres Π_1 et Π_2 lorsqu'il est la réunion de Π_1 et Π_2 et que l'intersection de Π_1 et Π_2 est constituée d'une ou plusieurs faces communes à Π_1 et Π_2 . Précisons que les sommets de Π sont aussi la réunion de ceux de Π_1 et ceux de Π_2 .
Un polyèdre Π est composé de deux polyèdres convexes ayant une seule face commune. Déterminer sa caractéristique d'Euler $\chi(\Pi)$. Le polyèdre Π est-il étoilé?
Reprendre la question dans le cas où le polyèdre Π est composé de deux polyèdres étoilés ayant une seule face commune. Montrer qu'il existe des polyèdres non étoilés dont la caractéristique d'Euler égale 2.
219. On dit qu'un polyèdre est de **genre zéro** lorsque sa caractéristique d'Euler égale 2. Montrer que si Π_1 et Π_2 sont deux polyèdres de genre zéro ayant une unique face commune, le polyèdre Π obtenu en composant Π_1 et Π_2 est aussi de genre zéro.
220. Déterminer la caractéristique d'Euler d'un polyèdre obtenu en composant deux polyèdres de genre zéro ayant en commun deux faces disjointes.
Indication: essayer de tirer un exemple de la figure 144. Imaginer d'autres cas.
221. Lorsqu'on compose un polyèdre Π_1 avec un polyèdre Π_2 de genre zéro ayant deux faces communes disjointes avec Π_1 , on dit qu'on ajoute **une anse** à Π_1 . Comment varie la caractéristique d'un polyèdre lorsqu'on lui ajoute une anse? Un polyèdre est de **genre n** s'il peut être obtenu à partir d'un polyèdre de genre zéro en ajoutant successivement n anses. Quelle est la caractéristique d'Euler d'un polyèdre de genre n ?
Remarque: un polyèdre de genre zéro n'a pas d'anse. Si sa surface était en caoutchouc et qu'on le gonfle, il prendrait l'allure d'une sphère. C'est pourquoi on dit aussi qu'il est «du genre de la sphère». Un polyèdre de

genre 1 a une anse. Si on gonflait sa surface, elle deviendrait semblable à celle d'un tore ou, si on préfère, d'une chambre à air. Il est du «genre du tore».

222. Soit a un nombre supérieur à zéro. Un cube C d'arête $3a$ est composé de 27 petits cubes d'arête a . On ôte de C le petit cube central c ainsi que les six petits cubes ayant une face commune avec c . Appelons Π le polyèdre restant. Déterminer la caractéristique d'Euler $\chi(\Pi)$. Ajouter sur la frontière de Π des sommets et des arêtes en suffisance pour que les faces de Π soient toutes des polygones simples. En dénombrant les faces, les arêtes et les sommets de Π , évaluer directement $\chi(\Pi)$.
223. Décrire et dessiner un polyèdre de genre 2. Faire de même pour un polyèdre de genre n .
224. Dessiner le développement d'un octaèdre régulier. Reconstituer la surface de l'octaèdre à partir de son développement reporté sur du papier fort et muni d'onglets de fixation. Recommencer avec le dodécaèdre et l'icosaèdre réguliers.
225. Dessiner le graphe plan de la surface du dodécaèdre régulier. Y trouver un arbre maximal. Peut-on en tirer directement le graphe plan de la surface de l'icosaèdre régulier? Reprendre le problème à partir de l'icosaèdre régulier.
226. Identifier l'enveloppe convexe des points milieux des arêtes d'un tétraèdre régulier.
227. Montrer que l'octaèdre régulier est le seul solide platonicien que l'on puisse colorier en noir et blanc, à la manière d'un échiquier, de sorte que deux faces adjacentes soient de couleurs différentes. Combien de couleurs faut-il au minimum pour colorier les autres solides platoniciens, toujours de façon que deux faces adjacentes soient de couleurs différentes?
228. Il existe d'autres méthodes que celle que nous avons indiquée pour construire un icosaèdre régulier. En voici une. On part d'un octaèdre régulier. On colorie ses faces en noir et blanc comme l'indique l'exercice 227. On divise les arêtes des faces blanches en «moyenne et extrême raison», comme l'indique la figure 145 a).

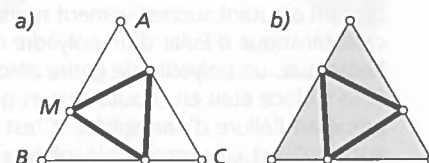


Fig. 145

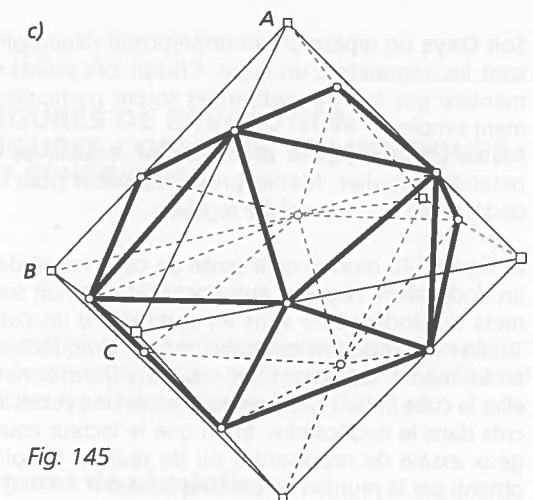


Fig. 146

Rappelons que le point M divise le segment orienté BA en moyenne et extrême raison lorsque le rapport de section $(BA, M) = -\lambda$, où λ est le «nombre d'or», c'est-à-dire la racine positive de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$. Les côtés de la face blanche ABC sont orientés en parcourant la frontière dans un sens arbitraire. On procède de même avec les faces noires, comme ACD , mais en parcourant leur frontière dans le sens inverse. Le problème consiste à prouver que l'enveloppe convexe des points obtenus est bien un icosaèdre régulier.

229. L'icosidodécaèdre peut être défini comme l'enveloppe convexe des milieux des arêtes d'un icosaèdre régulier. Décrire ce solide. Le représenter en perspective. En dessiner un développement et le construire en papier fort.
230. Décrire le tétraèdre dont le développement peut être donné par un triangle muni de ses lignes moyennes (voir fig. 146). En particulier, trouver les demi-tours qui transforment le tétraèdre en lui-même.

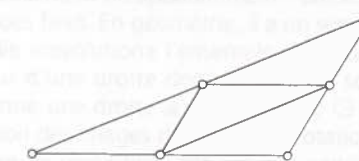


Fig. 146

231. Le graphe géométrique spatial constitué par les arêtes d'un tétraèdre – qu'on appelle aussi son «1-squelette» – est «rigide». Essayer de définir cette notion. Le 1-squelette d'un cube est-il rigide? Si ce n'est pas le cas, quels segments faudrait-il ajouter pour qu'il devienne rigide? Même question pour l'octaèdre régulier.

232. Soit **Oxyz** un repère orthonormé positif. Huit points sont les sommets d'un cube. Choisir ces points de manière que leurs coordonnées soient particulièrement simples.

Même problème pour un tétraèdre régulier et un octaèdre régulier. Même problème enfin pour un dodécaèdre et un icosaèdre réguliers.

233. La figure 140 montre qu'il existe un cube inscrit dans un dodécaèdre régulier; autrement dit que huit sommets du dodécaèdre sont les sommets d'un cube. Trouver des rotations qui transforment le dodécaèdre en lui-même. Comment ces rotations transforment-elles le cube initial? Montrer qu'il existe cinq cubes inscrits dans le dodécaèdre. Enfin que le lecteur courageux essaie de représenter ou de réaliser le solide obtenu par la réunion de ces cinq cubes.

La figure 140 montre qu'il existe un cube inscrit dans un dodécaèdre régulier; autrement dit que huit sommets du dodécaèdre sont les sommets d'un cube. Trouver des rotations qui transforment le dodécaèdre en lui-même. Comment ces rotations transforment-elles le cube initial? Montrer qu'il existe cinq cubes inscrits dans le dodécaèdre. Enfin que le lecteur courageux essaie de représenter ou de réaliser le solide obtenu par la réunion de ces cinq cubes.

La figure 140 montre qu'il existe un cube inscrit dans un dodécaèdre régulier; autrement dit que huit sommets du dodécaèdre sont les sommets d'un cube. Trouver des rotations qui transforment le dodécaèdre en lui-même. Comment ces rotations transforment-elles le cube initial? Montrer qu'il existe cinq cubes inscrits dans le dodécaèdre. Enfin que le lecteur courageux essaie de représenter ou de réaliser le solide obtenu par la réunion de ces cinq cubes.

La figure 140 montre qu'il existe un cube inscrit dans un dodécaèdre régulier; autrement dit que huit sommets du dodécaèdre sont les sommets d'un cube. Trouver des rotations qui transforment le dodécaèdre en lui-même. Comment ces rotations transforment-elles le cube initial? Montrer qu'il existe cinq cubes inscrits dans le dodécaèdre. Enfin que le lecteur courageux essaie de représenter ou de réaliser le solide obtenu par la réunion de ces cinq cubes.

La figure 140 montre qu'il existe un cube inscrit dans un dodécaèdre régulier; autrement dit que huit sommets du dodécaèdre sont les sommets d'un cube. Trouver des rotations qui transforment le dodécaèdre en lui-même. Comment ces rotations transforment-elles le cube initial? Montrer qu'il existe cinq cubes inscrits dans le dodécaèdre. Enfin que le lecteur courageux essaie de représenter ou de réaliser le solide obtenu par la réunion de ces cinq cubes.

CHAPITRE 11

FIGURES DE RÉVOLUTION FIGURES CONIQUES, CYLINDRIQUES ET SPHÉRIQUES

Les polyèdres sont limités par des portions de plans. Nous voulons enrichir un peu notre catalogue de surfaces afin de décrire des solides nouveaux.

Figures de révolution

La notion de figure de révolution peut être définie de plusieurs manières équivalentes. Choisissons celle-ci:

Définition 49

Une figure F est **de révolution** par rapport à une droite a lorsqu'elle est transformée en elle-même – on dit aussi «invariante» – par toutes les rotations d'axe a . La droite a est alors l'**axe de révolution** de la figure F .

Il revient toutefois au même de dire que F est **de révolution** autour de a lorsqu'elle est invariante par toutes les réflexions selon les plans contenant a . On peut dire aussi que la figure F est de révolution autour de a si elle est la réunion d'une famille de cercles d'axe a . Il est facile de montrer que ces trois définitions sont équivalentes.

Le terme de «révolution» a été employé d'abord en astronomie, pour désigner le mouvement d'un astre qui repasse – réellement ou apparemment – par les mêmes points, à périodes fixes. En géométrie, il a un sens plus restreint: on appelle «révolution» l'ensemble des rotations de l'espace autour d'une droite donnée appelée son axe. Lorsqu'on se donne une droite a et une figure G dans l'espace, la réunion des images de G par les rotations d'axe a est une figure de révolution: elle est dite «engendrée par la révolution de G autour de a ».

Nous connaissons déjà des figures de révolution. Tout cercle c est de révolution autour de son axe a . Toute sphère Σ est une surface de révolution autour de chacun de ses diamètres. Toute boule B est un solide de révolution autour de chacun de ses diamètres. La figure 147 nous montre deux autres figures de révolution. La figure 147 a) fait apparaître la surface S d'une sorte d'amphore. Elle nous suggère que

Figure de révolution.

Axe.



Cette figure a pour axe l'axe de révolution a . Elle est engendrée par la révolution de la courbe c autour de a .