Analyse I, XXX-EPFL   Novembre 2014, 67 minutes

131

Examen blanc d'analyse 1, Automne 2014
Les contenus ne reflètent qu'environ la moitié du semestre

XXX

SCIPER:

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 8 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera:

  $+3$ points si la réponse est correcte,
  0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera:

  $+1$ point si la réponse est correcte,
  0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- **Utilisez** un crayon et effacez proprement avec une gomme si nécessaire.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question mettre une croix dans la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : La limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2}{n^2}\right)^n$$

vaut

- ☐ e
- ☐ e^2
- ☐ e^{-2}
- ☐ 1

Question 2 : Soit

$$E=\left\{2+\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}\ :\ n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Alors

- ☐ $\sup E = 2$
- ☐ $\inf E = 2$
- ☐ $\sup E = \frac{9}{4}$
- ☐ $\inf E = \frac{7}{4}$

Question 3 : Soit

$$z=\left(\frac{1-\sqrt{3}\,i}{1+i}\right)^3.$$

Alors le conjugué complexe de z est

- ☐ $\bar{z}=-2-2i$
- ☐ $\bar{z}=2+2i$
- ☐ $\bar{z}=-2+2i$
- ☐ $\bar{z}=2-2i$

Question 4 : La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n}+1}-\frac{n+1}{\sqrt{n+1}+1}\right)$

- ☐ converge vers $\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{\sqrt{2}+1}$
- ☐ diverge
- ☐ converge vers 0
- ☐ converge vers 1/2

Question 5 : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{x^2+2}$, alors f est

- ☐ croissante, majorée, surjective, continue
- ☐ décroissante, majorée, surjective, pas continue
- ☐ strictement décroissante, majorée, injective, continue
- ☐ strictement croissante, majorée, injective, continue

Question 6 : Soit la suite

$$a_n = \sqrt[n]{2^3} - \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

Alors

- ☐ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- ☐ $\lim_{n\to\infty} a_n = -1$
- ☐ la suite diverge
- ☐ $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, mettre une croix (sans faire de ratures) dans la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 7 : Une suite numérique qui converge vers le supremum de son ensemble de valeurs est croissante.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 8 : Soit E et F deux ensembles non vides. Si $\sup E \leq \sup F < \infty$ alors il existe un élément $c \in F$ qui est un majorant de E.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 9 : Si la série $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ est absolument convergente alors la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k^p$$

est aussi absolument convergente pour tout $p \geq 1$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 10 : Soit $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ une fonction continue avec $f(0) = f(2)$. Alors, il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que

$$f(\alpha) = f(1+\alpha).$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 11 : La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^k}$ est convergente.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 12 : La fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x^2}$ est prolongeable par continuité en 0.

☐ VRAI ☐ FAUX

Troisième partie, questions de type ouvert

Pour chaque question, répondre dans l'espace dédié. Laisser libre les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 13 :

Réservé au correcteur

Soit

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x+1) & x \leq -1 \\ |x| - 1 & -1 < x < 1 \\ \arctan(x-1) & x \geq 1 \end{cases}$$

(a) Trouver le domaine de définition de f (noté D_f) et l'image de f (notée $\mathcal{I}m(f)$).

(b) Tracer le graphe de la fonction f ; est-ce-que f est une fonction paire ? Est-elle impaire ?

(c) Soit $E = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0\}$. Déterminer $\inf E$ et $\sup E$. E est-il un ensemble fermé ? Est-il ouvert ?

(d) Déterminer les intervalles de monotonie de f.

(e) Montrer, en utilisant la définition de limite, que

$$\lim_{x \to 1_-} f(x) = \lim_{x \to 1_+} f(x)$$

et en déduire que f est continue en $x = 1$.

Est-elle continue sur tout son domaine de définition ?