



131

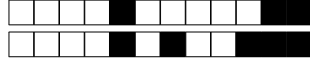
Examen blanc d'analyse 1, Automne 2014
Les contenus ne reflètent qu'environ la moitié du semestre

XXX

SCIPER:

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 8 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera:
 - +3 points si la réponse est correcte,
 - 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera:
 - +1 point si la réponse est correcte,
 - 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- **Utilisez** un crayon et effacez proprement avec une gomme si nécessaire.



Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question mettre une croix dans la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : La limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2}{n^2} \right)^n$$

vaut

- e
- e^2
- e^{-2}
- 1

Question 2 : Soit

$$E = \left\{ 2 + \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Alors

- $\sup E = 2$
- $\inf E = 2$
- $\sup E = \frac{9}{4}$
- $\inf E = \frac{7}{4}$

Question 3 : Soit

$$z = \left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{1 + i} \right)^3.$$

Alors le conjugué complexe de z est

- $\bar{z} = -2 - 2i$
- $\bar{z} = 2 + 2i$
- $\bar{z} = -2 + 2i$
- $\bar{z} = 2 - 2i$

Question 4 : La série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{\sqrt{n}+1} - \frac{n+1}{\sqrt{n+1}+1} \right)$

- converge vers $\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{2}+1}$
- diverge
- converge vers 0
- converge vers $1/2$



Question 5 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 2}$, alors f est

- croissante, majorée, surjective, continue
- décroissante, majorée, surjective, pas continue
- strictement décroissante, majorée, injective, continue
- strictement croissante, majorée, injective, continue

Question 6 : Soit la suite

$$a_n = \sqrt[n]{2^3} - \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

Alors

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$
- la suite diverge
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$



Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, mettre une croix (sans faire de ratures) dans la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 7 : Une suite numérique qui converge vers le supremum de son ensemble de valeurs est croissante.

VRAI FAUX

Question 8 : Soit E et F deux ensembles non vides. Si $\sup E \leq \sup F < \infty$ alors il existe un élément $c \in F$ qui est un majorant de E .

VRAI FAUX

Question 9 : Si la série $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ est absolument convergente alors la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k^p$$

est aussi absolument convergente pour tout $p \geq 1$

VRAI FAUX

Question 10 : Soit $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue avec $f(0) = f(2)$. Alors, il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que

$$f(\alpha) = f(1 + \alpha).$$

VRAI FAUX

Question 11 : La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^k}$ est convergente.

VRAI FAUX

Question 12 : La fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x^2}$ est prolongeable par continuité en 0.

VRAI FAUX



Troisième partie, questions de type ouvert

Pour chaque question, répondre dans l'espace dédié. Laisser libre les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 13 :

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<i>Réservé au correcteur</i>
--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	------------------------------

Soit

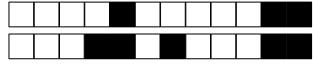
$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x + 1) & x \leq -1 \\ |x| - 1 & -1 < x < 1 \\ \arctan(x - 1) & x \geq 1 \end{cases}$$

- (a) Trouver le domaine de définition de f (noté D_f) et l'image de f (notée $\mathcal{I}m(f)$).
- (b) Tracer le graphe de la fonction f ; est-ce-que f est une fonction paire ? Est-elle impaire ?
- (c) Soit $E = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0\}$. Déterminer $\inf E$ et $\sup E$. E est-il un ensemble fermé ? Est-il ouvert ?
- (d) Déterminer les intervalles de monotonie de f .
- (e) Montrer, en utilisant la définition de limite, que

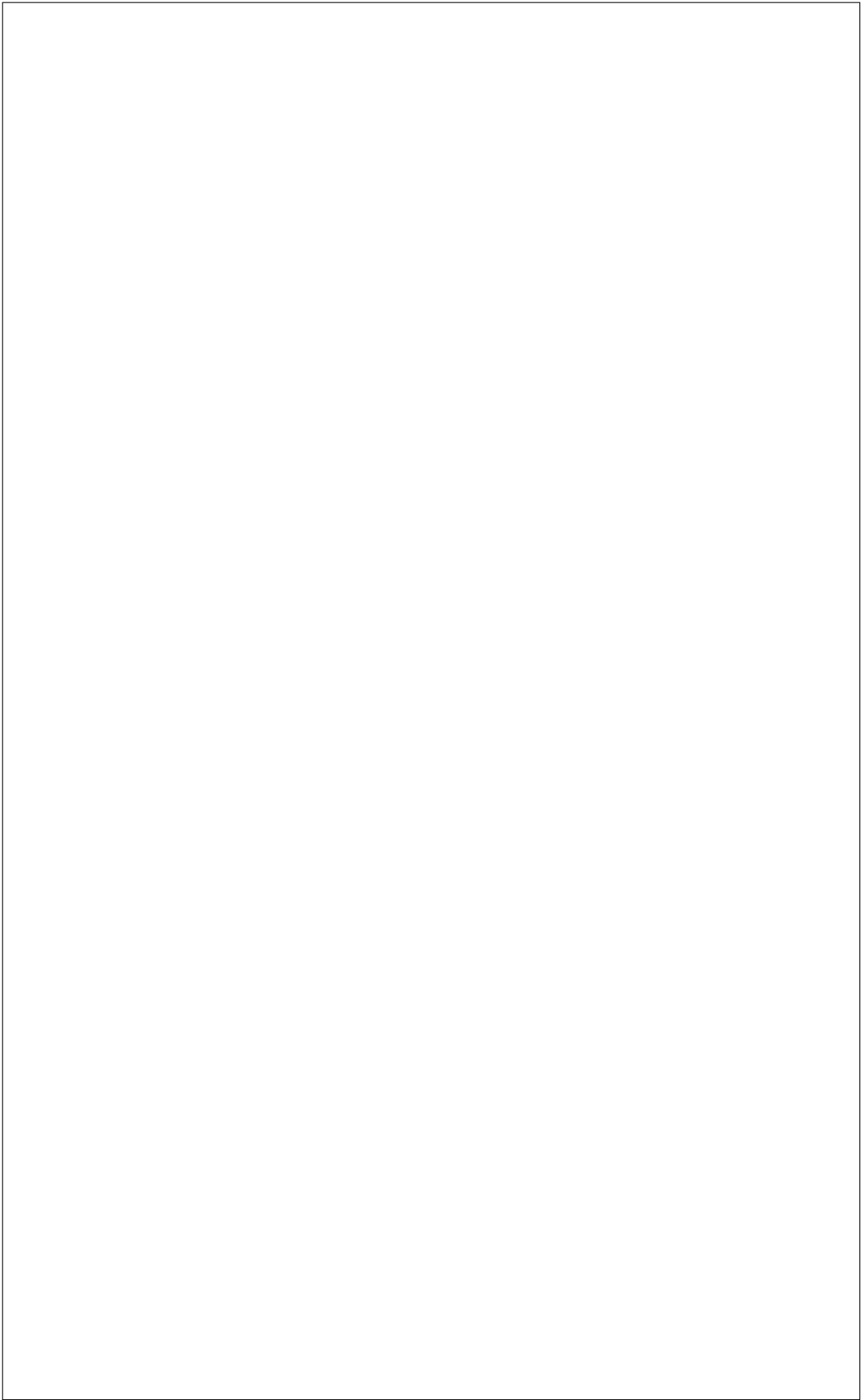
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

et en déduire que f est continue en $x = 1$.

Est-elle continue sur tout son domaine de définition ?



+131/6/35+





+131/7/34+



+131/8/33+