Algèbre Linéaire, sec-EPFL Novembre 2014, 60 minutes

140

Examen blanc d'algèbre linéaire, Automne 2014
Les contenus ne reflètent qu'environ la moitié du semestre

Stud8

SCIPER:

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page

Ce document est imprimé recto-verso, il contient 8 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera:

  $+3$ points si la réponse est correcte,
  0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera:

  $+1$ point si la réponse est correcte,
  0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- **Utilisez** un crayon et effacez proprement avec une gomme si nécessaire.

Notation:

- Pour une matrice A, a_{ij} désigne l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question mettre une croix dans la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 :
Soit R la forme échelonnée réduite de la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 & 18 \\ 2 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Alors, on a

- ☐ $r_{24} = 5$
- ☐ $r_{24} = -2$
- ☐ $r_{24} = 3$
- ☐ $r_{24} = 13$

Question 2 :
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ -4 & -4 & -5 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & -4 & 15 & -6 \\ 0 & -4 & -5 & 11 & 0 \\ 8 & 6 & 9 & -3 & -14 \end{pmatrix}.$$

Calculer la factorisation LU de A (en utilisant *seulement* les opérations élémentaires sur les lignes consistant à ajouter un multiple d'une ligne à une autre ligne *en dessous*). La matrice L ainsi obtenue est telle que:

- ☐ $l_{43} = 1$
- ☐ $l_{43} = 2$
- ☐ $l_{43} = -1$
- ☐ $l_{43} = -2$

Question 3 :
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et soit $B = A^{-1}$. Alors

- ☐ $b_{31} = 2$
- ☐ $b_{31} = 4$
- ☐ $b_{31} = -3$
- ☐ $b_{31} = -2$

Question 4 :
Calculer le déterminant

$$d = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Alors

- [ ] $d = -63$
- [ ] $d = 43$
- [ ] $d = -13$
- [ ] $d = 39$

Question 5 :
Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ 17 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

La solution $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ de l'équation matricielle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est telle que

- [ ] $x_3 = 4$
- [ ] $x_3 = 1/2$
- [ ] $x_3 = 3$
- [ ] $x_3 = 2$

Question 6 :
Soient les vecteurs

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} h+20 \\ 9 \\ 2h-7 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Pour quelle valeur du nombre réel h le vecteur $\mathbf{b}$ appartient-il à $\mathrm{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$?

- [ ] $h = -7$
- [ ] $h = 5$
- [ ] $h = -3$
- [ ] $h = 2$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, mettre une croix (sans faire de ratures) dans la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est à dire, si elle est parfois fausse).

Question 7 : Soit A une matrice de taille $n \times n$ avec $n \geq 10$. Si la matrice B est obtenue en multipliant d'abord la cinquième ligne de A par $\frac{1}{n}$ et ensuite la cinquième colonne par $\frac{1}{n}$, puis finalement la septième ligne par n alors $\det A = n \det B$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 8 : Soient M et N deux matrices partitionnées triangulaires inférieures par blocs données par

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ B' & C' \end{pmatrix}$$

où A, A' sont des matrices carrées $n \times n$ et C, C' sont des matrices carrées $m \times m$. Si M est inversible, alors $M^{-1}N$ et NM^{-1} sont aussi des matrices partitionnées triangulaires inférieures par blocs.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 9 : Soit V un espace vectoriel tel que $\dim V = n$. Si S est un ensemble de vecteurs qui engendre V, alors S est une base de V.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 10 : Soit A une matrice de taille $m \times n$. Si la transformation matricielle définie par $\mathbf{x} \mapsto A^T\mathbf{x}$ est injective, alors $n \geq m$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 11 : Soit $\mathbf{y}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^m$ fixé. L'application $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ qui à tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ fait correspondre $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ est une transformation linéaire.

☐ VRAI ☐ FAUX

Troisième partie, questions de type ouvert

Pour chaque question, répondre dans l'espace dédié. Laisser libre les cases à cocher: elles sont réservées au correcteur.

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ *Réservé au correcteur*

Question 13 : Soit V l'espace vectoriel des matrices carrées $4x4$ muni de l'addition et multiplication par un scalaire habituelles. On considère la transformation $T : V \to \mathbb{R}^3$ définie par $T(A) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{33} \end{pmatrix}$, où $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,4}$.

(a) Vérifier que T est linéaire.

(b) Trouver $\operatorname{Ker} T$.

(c) Trouver $\operatorname{Im} T$.

Attention: votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.