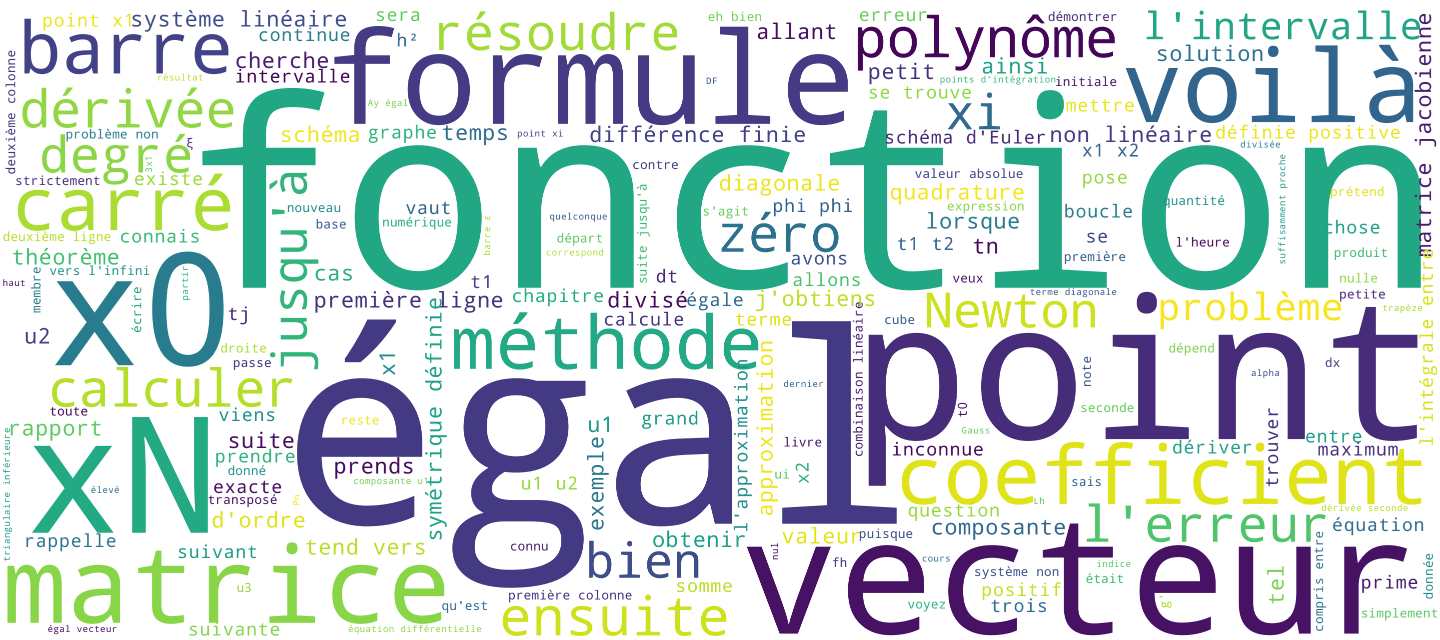
Chapitre 10 : Un problème non linéaire (suite)

Introduction à l'analyse numérique

Prof. Marco Picasso



Search MOOC

Video

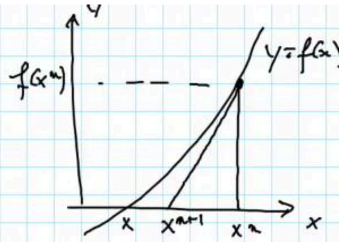
EPFL

Chap 10 : un problème non linéaire

Cherche $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$ tq $\vec{F}(\vec{u}) = \vec{0}$: $\begin{pmatrix} \frac{2u_1-u_2}{h^2} + x_1(u_1)^3 - f(x_1) \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$

x tq $f(x)$

$f'(x^n) = \frac{f(x^n)}{x^n - x^{n+1}}$



Je vais maintenant résoudre ce problème non linéaire à N équations et N inconnues à l'aide de la méthode de Newton. Donc je vous rappelle que je cherche, on cherche u, qui est le vecteur de composante u1, u2, uN, les approximations de u au point x1, u au point x2, u au point xN, tel que F vecteur de u vecteur égal 0 vecteur et F de u était obtenu, donc les équations étaient écrites dans ce vecteur F de u. La première équation c'était 2u1 moins u2 sur h carré, l'approximation de u seconde au point x1, plus x1 fois u1 au cube moins f au point x1, et ainsi de suite. Donc je vais mettre en oeuvre la méthode de Newton pour trouver le zéro de cette fonction. Un petit rappel sur la méthode de Newton. Donc, je cherche x tel que f de x égal zéro. Donc voilà le graphe de la fonction f. Voilà le zéro. Et je pars de xN et je veux calculer xN+1. Donc je prends la tangente et je cherche l'intersection avec l'axe des x. Donc ici, j'ai f de xN. Donc ceci est le graphe de la fonction f. Et donc j'ai bien f prime de xN qui égal à f de xN, l'accroissement en y, f de xN moins 0, divisé par l'accroissement en x qui est xN moins xN+1. Attention aux signes. xN moins xN+1.

Notes

Summary

0m 03s

Chap 10 : un problème non linéaire

Cherche $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$ tq $\vec{F}(\vec{u}) = \vec{0} = \begin{pmatrix} \frac{2u_1 - u_2}{h^2} + x_1(u_1)^3 - f(x_1) \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$

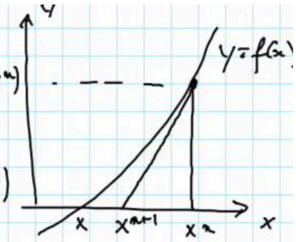
$\vec{u}^n$ connu $\vec{u}^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N^n \end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}^{n+1}$ tq $DF(\vec{u}^n)(\vec{u}^n - \vec{u}^{n+1}) = \vec{F}(\vec{u}^n)$

$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^N \qquad DF(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} + 3x_1(u_1)^2 & \\ & \end{pmatrix}$

x tq $f(x)$

$f'(x^n) = \frac{f(x^n)}{x^n - x^{n+1}}$

$f'(x^n)(x^n - x^{n+1}) = f(x^n)$



Et donc f prime de xN fois xN moins xN+1 doit être égal à f de xN. Donc ça c'est pour une fonction f de R dans R. Maintenant dans le cas d'un système non linéaire, uN est déjà calculé, connu, donc uN c'est le vecteur de composante u1N, u2N, jusqu'à u grand N en bas, petit n en haut. Donc des approximations du vecteur u telles que f de u est égal à zéro. Et uN+1 doit être tel que, justement, ici, f prime devient la matrice jacobienne DF évaluéé en uN, que je connais, fois le vecteur uN moins uN+1 égal F évalué en uN, que je connais. Donc il s'agit maintenant de préciser ce qu'est la matrice jacobienne. Donc j'ai ici l'expression de F de u, je vais donc calculer, pour tous u dans RN, de composante u1, u2, uN, je vais calculer DF de u. Alors DF de u, qu'est-ce que je dois faire ? Je dois calculer la dérivée, donc je dois prendre la première ligne, je dois dériver cette expression par rapport à x1. Je vais avoir le coefficient a1 de cette matrice jacobienne. Donc si je dérive cette expression par rapport à u1, j'obtiens 2 sur h carré et j'ai encore ici 3x1 fois u1 carré. Donc j'ai 2 sur h carré plus 3x1 fois u1 élevé au carré. Donc voilà la dérivée de la première ligne par rapport à u1.

Notes

Summary

2m 02s

Chap 10 : un problème non linéaire

Cherche $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$ tq $\vec{F}(\vec{u}) = \vec{0}$: $\begin{pmatrix} \frac{2u_1 - u_2}{h^2} + x_1(u_1)^3 - f(x_1) \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$

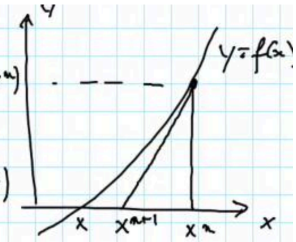
$\vec{u}^n$ connu $\vec{u}^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N^n \end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}^{n+1}$ tq $DF(\vec{u}^n)(\vec{u}^n - \vec{u}^{n+1}) = \vec{F}(\vec{u}^n)$

$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^N \qquad DF(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} + 3x_1(u_1)^2 & -\frac{1}{h^2} & & (0) \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + 3x_2(u_2)^2 & -\frac{1}{h^2} & \\ & \ddots & \ddots & -1/h^2 \\ (0) & & -1/h^2 & \frac{2}{h^2} + 3x_N(u_N)^2 \end{pmatrix}$

x tq $f(x)$

$f'(x^n) = \frac{f(x^n)}{x^n - x^{n+1}}$

$f'(x^n)(x^n - x^{n+1}) = f(x^n)$



Algorithme : $\vec{u}^0$

Je dois ensuite dériver cette première ligne par rapport à u2. Donc j'ai ici -1 sur h carré simplement. Donc ça c'est le coefficient première ligne deuxième colonne de la matrice jacobienne. Et ensuite, je dois dériver par rapport à u3 mais u3 n'apparaît pas donc la dérivée est nulle. Et ainsi de suite jusqu'à uN, la dérivée est nulle. Donc sur cette matrice, j'ai uniquement, sur cette première ligne, la dérivée par rapport à u1 et ici, la dérivée par rapport à u2. Je fais la même chose sur la deuxième ligne, et j'obtiens une matrice, ici, qui va être -1 sur h carré, le terme, ici, sous-diagonale. Le terme diagonale sera 2 sur h carré plus 3x2 fois u2 au carré. Et ensuite, je vais dériver par rapport à u3 et je vais obtenir, ici, -1 sur h carré. Donc je vais obtenir, pour finir, une matrice tridiagonale, de nouveau. Le coefficient sur et sous-diagonale ce sera -1 sur h carré. Et le coefficient diagonale, le dernier par exemple, sera 2 sur h carré plus 3xN fois uN élevé au carré. Tous les autres termes étant nuls. Donc voilà, je suis capable de calculer la matrice jacobienne. Maintenant je peux écrire l'algorithme qui correspond à la méthode de Newton. Donc je vais partir d'un u0 donné.

Notes

Summary

4m 06s

Chap 10 : un problème non linéaire

Cherche $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$ tq $\vec{F}(\vec{u}) = \vec{0}$: $\begin{pmatrix} \frac{2u_1 - u_2}{h^2} + x_1 (u_1)^3 - f(x_1) \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$

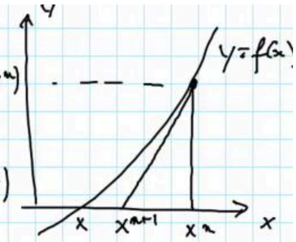
$\vec{u}^n$ connu $\vec{u}^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N^n \end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}^{n+1}$ tq $DF(\vec{u}^n)(\vec{u}^n - \vec{u}^{n+1}) = \vec{F}(\vec{u}^n)$

$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^N \qquad DF(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} + 3x_1(u_1)^2 & -\frac{1}{h^2} & & (0) \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + 3x_2(u_2)^2 & -\frac{1}{h^2} & \\ & \ddots & \ddots & -1/h^2 \\ (0) & & -1/h^2 & \frac{2}{h^2} + 3x_N(u_N)^2 \end{pmatrix}$

x tq $f(x)$

$f'(x^n) = \frac{f(x^n)}{x^n - x^{n+1}}$

$f'(x^n)(x^n - x^{n+1}) = f(x^n)$



Algorithme : $\vec{u}^0$ donné

$n = 0, 1, 2, \ldots$

$A = DF(\vec{u}^n)$

$\vec{b} = \vec{F}(\vec{u}^n)$

résoud $A\vec{y} = \vec{b}$ $\quad A = LL^T$

$L\vec{z} = \vec{b}$

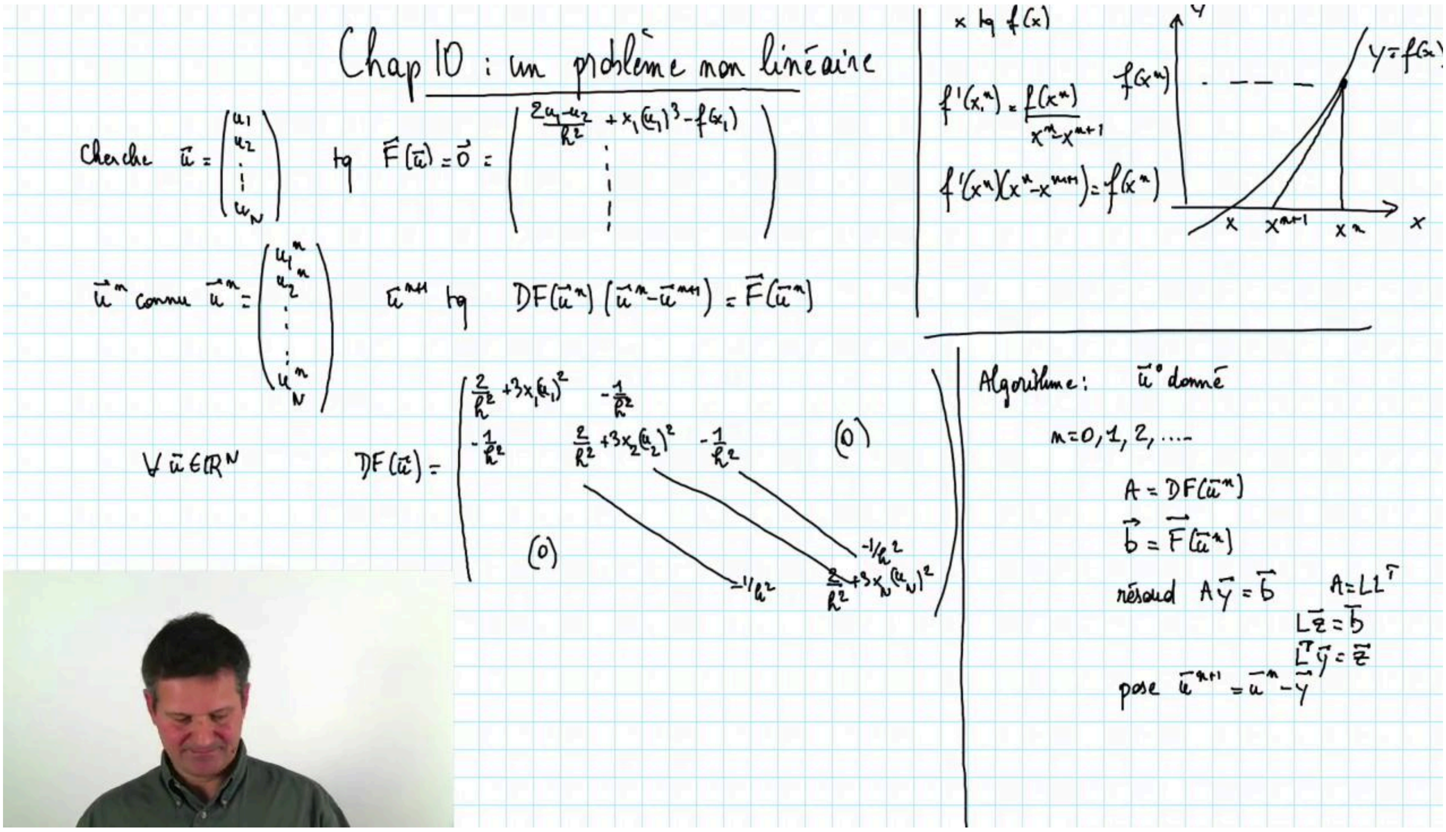
$L^T\vec{y} = z$

Donc je me donne toutes les composantes du vecteur u0 : u10, u20, jusqu'à uN0. Ensuite, je fais une boucle, N égal 0, 1, 2 et cetera. Je dois résoudre le système linéaire qui est ici, matrice fois vecteur inconnu égal vecteur connu. Donc je pose A égal DF de uN. Donc c'est la matrice jacobienne que je viens de déterminer, je viens de calculer pour un vecteur u quelconque évalué en ce vecteur uN qui est connu. Donc dans la première étape d'algorithme, j'ai ici N égal 0, je dois l'évaluer en u0. Ensuite, je calcule le second membre du système linéaire, que je note B. B c'est ici égal à F de uN. C'est un vecteur. F vecteur de uN vecteur. On résout Ay égal B. Donc il se trouve, ici, que la matrice, je peux démontrer que la matrice, ici, DF de u c'est une matrice qui est symétrique définie positive. Alors trouver ici la matrice des 2 et des -1 qui est symétrique définie positive, plus un terme diagonale qui a des coefficients positifs, donc cette matrice est symétrique définie positive. Je peux donc mettre, je peux donc calculer la décomposition LLT, par exemple de la matrice A, A égal LLT. Et ensuite, je dois résoudre deux systèmes linéaires. Donc je dois résoudre Lz égal B, et ensuite, L transposé y égal z.

Notes

Summary

5m 46s



Donc voilà, je résous le système linéaire Ay égal B. Donc y, ici, c'est uN moins uN+1, donc ensuite on pose : uN+1 égal uN moins ce vecteur y, que je viens de calculer. Et lorsque F de uN est suffisamment petit, je sors de cette boucle et je sais que la méthode de Newton, si elle converge, c'est-à-dire si le point de départ est suffisamment proche de la solution u, converge rapidement, donc en pratique, je ne vais faire que quelques itérations de cette méthode de Newton. Donc remarquez que on a à résoudre un problème non linéaire qui est issu, un système non linéaire de N équations, N inconnues qui est issu d'une équation différentielle non linéaire, et à chaque étape de la méthode de Newton, il faut résoudre un système linéaire.

Notes

Summary

7m 44s