Chapitre 10 : Un problème non linéaire

Introduction à l'analyse numérique

Prof. Marco Picasso

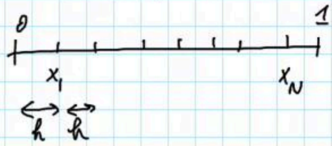
Search MOOC

Video

EPFL

Chap 10 : un problème non linéaire

$$\begin{cases} -u''(x) + x\,(u(x))^3 = f(x) & 0<x<1 \\ u(0)=0 \\ u(1)=0 \end{cases}$$



$h = \frac{1}{N+1}$

Je vous propose maintenant de résoudre un problème non linéaire et le problème non linéaire modèle que je vais écrire est le suivant : Donc *u* va satisfaire l'équation suivante. Je commence par une dérivée seconde, - *u''(x)*, plus un terme non linéaire que j'écris $x\ (u(x))^3$, égal *f(x)*, *x* compris entre 0 et 1, avec des conditions limites qui sont toujours que $u(0) = 0$ et $u(1) = 0$. Donc je rappelle ici que la fonction *f* est donnée sur l'intervalle]0, 1[et je cherche *u* qui satisfait cette équation. Cette équation est non linéaire car, contrairement au cas précédent, dans le cas linéaire, c'est-à-dire si cet terme n'existe pas, si j'applique une force deux fois *f*, la solution du problème c'est deux fois *u*, la déformation. Ceci n'est plus le cas dans le cas d'un problème non linéaire. Donc maintenant, je fais comme tout à l'heure. Je subdivise l'intervalle]0, 1[en sous-intervalles. Donc ici, 2, 4 et 8. Et comme tout à l'heure, je note *x1* le premier point, *xN* le dernier. Donc *h*, l'espacement entre deux points consécutifs, *h* est constant, c'est *1/(N+1)*.

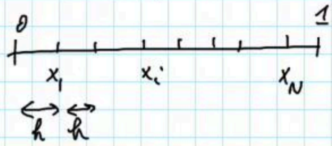
Notes

Summary

0m 03s

Chap 10 : un problème non linéaire

$$\begin{cases} -u''(x) + x\,(u(x))^3 = f(x) & 0<x<1 \\ u(0)=0 \\ u(1)=0 \end{cases}$$



$h = \frac{1}{N+1}$ $\quad x_i = ih \quad i=0,1,\dots,N+$

u_i approx de $u(x_i)$

$$-u''(x_i) + x_i\,(u(x_i))^3 = f(x_i) \qquad i=1,\dots,N$$

FDF centrée

$$\frac{-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) + u(x_{i+1})}{h^2} + x_i\,(u(x_i))^3 = f(x_i$$

Et je pose $xi = i\,h$, i allant de 0, 1, jusqu'à $N+1$. Donc ici, j'ai un point xi, à sa gauche xi-1, à sa droite $xi+1$. Et comme tout à l'heure, le but c'est de calculer ui, une approximation de u au point xi, la solution du problème au point xi. Donc qu'est-ce qu'on fait ? On fait comme tout à l'heure, on écrit l'équation différentielle au point xi. Donc, j'ai $-u''(xi)$ + xi, donc xi c'est i fois h, xi fois $u(xi)^3$ égal $f(xi)$, qui est connu, et je vais écrire ces équations pour tous les points i intérieurs, i allant de 1 jusqu'à N. Maintenant je fais comme tout à l'heure, j'utilise une formule de différence finie, *FDF*, centrée, pour l'approximation de la dérivée seconde, la même formule que tout à l'heure. Donc j'ai $2u(xi)$, à gauche -$u(xi-h)$, c'est-à-dire xi-1, $xi-h$, et puis à droite $u(xi+1)$, *divisé par*h^2*, comme tout à l'heure. Et cette fois-ci, j'ai le terme supplémentaire, qui est xi $u(xi)^3$, doit être égal à $f(xi)$.

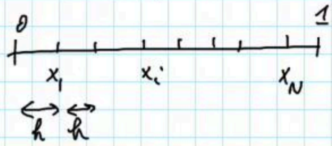
Notes

Summary

1m 27s

Chap 10 : un problème non linéaire

$$\begin{cases} -u''(x) + x\,(u(x))^3 = f(x) & 0<x<1 \\ u(0)=0 \\ u(1)=0 \end{cases}$$



$h = \frac{1}{N+1}$ $x_i = ih$ $i=0,1,\dots,N+1$

u_i approx de $u(x_i)$

$$-u''(x_i) + x_i\,(u(x_i))^3 = f(x_i) \quad i=1,\dots,N$$

$$\frac{-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) + u(x_{i+1})}{h^2} + x_i\,(u(x_i))^3 = f(x_i) + O(h^2)$$ FDF centrée

schéma : $$\frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} + x_i\,(u_i)^3 = f(x_i) \quad i=1,\dots,N$$

$u_0 = 0$

u_N

Et bien sûr, comme j'ai approché la dérivée seconde par une formule de différence finie, il me reste un terme en $O(h^2)$, qui va dépendre des dérivées quatrièmes de u. Maintenant j'écris un schéma, comme tout à l'heure, je remplace $u(x_i)$ par son approximation u_i, que je vais calculer sur l'ordinateur. Donc le schéma s'écrit de la manière suivante : « Schéma » Schéma, c'est quelque chose que je peux implémenter ensuite sur un ordinateur. Donc j'ai $2u_i$, u_{i-1} à gauche, $-u_{i+1}$ à droite, divisé par h^2, donc le même terme puisqu'il y a aussi, comme tout à l'heure, une dérivé seconde, la même dérivée seconde. Et cette fois-ci, j'ai $+x_i$ qui est connu, je vous rappelle que x_i c'est i fois h. Et j'ai un nouveau terme qui correspond à $(u(x_i))^3$, donc je vais le remplacer par u_i^3, égal $f(x_i)$, je vous rappelle que $f(x_i)$ est connu, et je laisse bien évidemment tomber ce terme en $O(h^2)$. Donc ceci doit être satisfait pour tous les i allant de 1 jusqu'à N, avec la même convention que tout à l'heure, qui est que pour l'indice $i = 1$, j'ai ici u_0 qui intervient et je pose $u_0 = 0$ à cause de la première condition limite, et de même, lorsque l'indice i vaut N ici, j'ai u_{N+1} qui, lui aussi, est égal à 0.

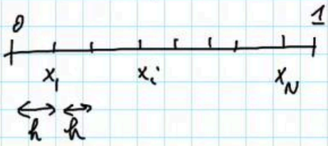
Notes

Summary

2m 55s

Chap 10 : un problème non linéaire

$$\begin{cases} -u''(x) + x\,(u(x))^3 = f(x) & 0<x<1 \\ u(0)=0 \\ u(1)=0 \end{cases}$$



$h = \frac{1}{N+1}$ $\quad x_i = ih \quad i=0,1,\dots,N+1$

u_i approx de $u(x_i)$

$$-u''(x_i) + x_i\,(u(x_i))^3 = f(x_i) \qquad i=1,\dots,N$$

$$\frac{-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) + u(x_{i+1})}{h^2} + x_i\,(u(x_i))^3 = f(x_i) + O(h^2) \qquad \text{FDF centrée}$$

schéma : $\begin{cases} \dfrac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} + x_i\,(u_i)^3 = f(x_i) & i=1,\dots,N \\ u_0 = 0 \\ u_{N+1} = 0 \end{cases}$

Système non linéaire $\vec{F}(\vec{u}) = \vec{0}$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \quad \vec{F}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} F_1(u_1, u_2, \dots, u_N) \\ F_2(u_1\ u_2 \cdots u_N) \\ \vdots \\ F_N(u_1, u_2 \cdots u_N) \end{pmatrix}$$

uN+1 est égal à 0 à cause de l'autre condition limite. Donc voilà le schéma que j'obtiens maintenant. Et maintenant je prétends que tout à l'heure, résoudre le problème correspondait à la résolution d'un système linéaire et maintenant je dois résoudre un système non linéaire. Je suis parti d'un problème, d'une équation différentielle non linéaire et j'aboutis à un système non linéaire, que je vais réécrire sous forme concise, ***F*** vecteur de ***u*** vecteur égal 0 vecteur. Donc ici, *u* c'est le vecteur des inconnues, c'est *u1*, *u2*,..., jusqu'à *uN*, qui sont, comme précédemment, les approximations de *u(x1)*, *u(x2)*, jusqu'à *u(xN)*. Et puis ***F(u)***, eh bien, donc ***F(u)***, alors je fais référence ici, au chapitre 8 sur les systèmes d'équations non linéaires donc ***F(u)***, je vais l'écrire ***F1(u)***, du vecteur ***u***, mais le vecteur ***u*** c'est le vecteur de composante *u1*, *u2*, jusqu'à *uN*, c'est la première ligne. ***F2*** de *u1*, *u2*, jusqu'à *uN*, et ainsi de suite jusqu'à la dernière équation ***F*** indice *N* de *u1*, *u2*, jusqu'à *uN*.

Notes

Summary

4m 29s

Chap 10 : un problème non linéaire

$$\begin{cases} -u''(x) + x(u(x))^3 = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

$0 \quad 1 \qquad h = \frac{1}{N+1} \qquad x_i = ih \quad i = 0, 1, \dots, N+1$

$x_1 \quad x_i \quad x_N$

$h \quad h$

u_i approx de $u(x_i)$

$$-u''(x_i) + x_i (u(x_i))^3 = f(x_i) \qquad i = 1, \dots, N$$

$$\frac{-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) + u(x_{i+1})}{h^2} + x_i (u(x_i))^3 = f(x_i) + O(h^2) \qquad \text{FDF centrée}$$

schéma :
$$\begin{cases} \dfrac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} + x_i (u_i)^3 = f(x_i) & i = 1, \dots, N \\ u_0 = 0 \\ u_{N+1} = 0 \end{cases}$$

Système non linéaire $\vec{F}(\vec{u}) = \vec{0}$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \quad \vec{F}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} F_1(u_1, u_2, \dots, u_N) \\ F_2(u_1\ u_2 \dots u_N) \\ \vdots \\ F_N(u_1, u_2 \dots u_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2u_1 - u_2}{h^2} + x_1 (u_1)^3 - f(x_1) \\ \dfrac{-u_1 + 2u_2 - u_3}{h^2} + x_2 (u_2)^3 - f(x_2) \\ \vdots \\ \dfrac{-u_{N-1} + 2u_N}{h^2} + x_N (u_N)^3 - f(x_N) \end{pmatrix}$$

Méthode de Newton Chap 8.

Alors ici, dans le cas particulier qui nous concerne, la première équation c'est *(2u1 - u2)/h² + x1 (u1)³ - f(x1)*. Ici, j'ai donc *(2u1 - u2)/h² + x1 (u1)³ - f(x1)*. Ceci doit être égal à zéro, c'est ma première équation. De même, je peux écrire la deuxième équation. Ce sera - *(u1 + 2u2 - u3)* sur *h²*, donc ce terme, ici, pour *i = 2*, *+ x2 (u2)³ - f(x2)*. *+ x2 (u2)³ - f(x2)*. Et ainsi de suite jusqu'à la dernière ligne, que je vais écrire. Donc pour *i = N*, j'ai ici *(- uN-1 + 2uN)* sur *h² + xN (uN)³ - f(xN)*, qui doit être égal à zéro. Donc vous voyez bien que j'ai bien à faire à un système non linéaire de *N* équations, voilà les *N* équations, elles sont aussi écrites ici, *N* équations, à *N* inconnues, les *N* inconnues *u1*, *u2*, *uN*, et les relations, on ne peux pas résoudre ces équations indépendamment l'une de l'autre, elles sont liées, *u1* est liée à *u2*, *u1* liée à *u2* liée à *u3*. Il y a des relations non linéaires, donc il s'agit bien de résoudre un système d'équations non linéaire. Et pour résoudre ce système d'équations non linéaire, je vais utiliser la méthode de Newton du chapitre 8.

Notes

Summary

6m 03s