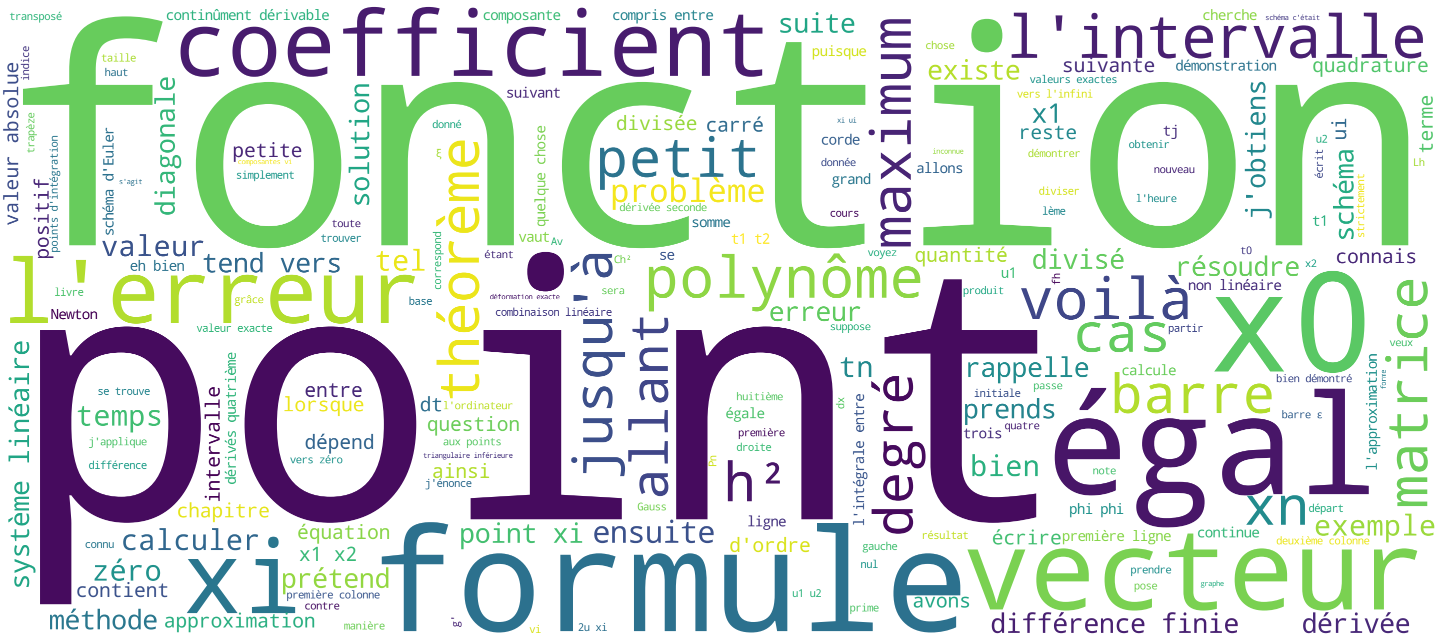
Chapitre 10 : Méthode de différences finies (suite)

Introduction à l'analyse numérique

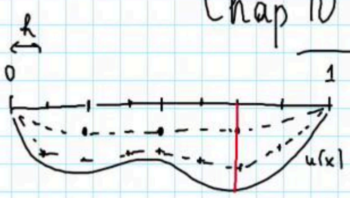
Prof. Marco Picasso



Search MOOC

Video

Chap 10 : Méthode de différences finies (suite)



$u_i \xrightarrow{h \to 0} u(x_i)$?

l'erreur est divisée par $2^2=4$ si h est divisé par 2. $O(h^2)$

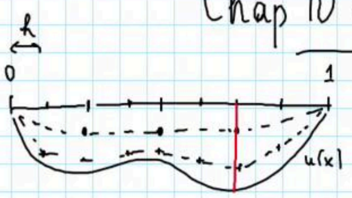
Voilà, je vous rappelle que j'ai subdivisé cette corde élastique sur l'intervalle 01 en sous-intervalles de même taille h ici, donc voilà la déformation exacte de la corde que je ne connais pas, alors ce qui va se passer, c'est que je vais prendre d'abord par exemple ici 3 points, donc je vais calculer une approximation de la déformation en 3 points. Donc ici, j'aurai une approximation déformée. Et ensuite, je vais diviser h par 2, la taille de maille par 2, donc je vais calculer les choses, non pas en 3 points, mais en 7 points, je vais diviser h par deux, 1 point, 2 points, 3 points, 4 points, 5, 6 et 7, donc voilà l'approximation de la corde déformée avec sept points, et la question que je me pose est la suivante : est-ce que ui, l'approximation de u au point xi et cette quantité-là convergent vers la valeur exacte, u au point xi que je ne connais pas, lorsque h tend vers zéro. Alors je prétends que c'est le cas, si vous regardez ici, vous voyez l'erreur qui allait au départ de là à là, l'erreur était cette quantité-là, j'ai divisé h par 2, l'erreur a été divisée par 4, donc je prétends que l'erreur est divisée par $2^2=4$ si h est divisé par 2. Donc cette méthode converge en haut de h^2.

Notes

Summary

0m 04s

Chap 10 : Méthode de différences finies (suite)



$u_i \xrightarrow{h \to 0} u(x_i)$?

l'erreur est divisée par $2^2 = 4$ si h est divisé par 2. $O(h^2)$

Thm : $u \in \mathcal{C}^4[0,1]$ $\exists C > 0$ $\forall\, 0 < h < 1$ $\max_{1 \le i \le N} |u_i - u(x_i)| \le Ch^2$.

Dem : schéma : $\dfrac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} = f(x_i)$ $A\vec{u} = \vec{f}$

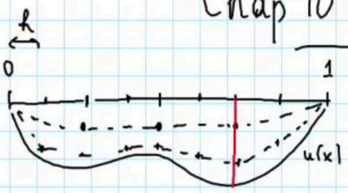
Donc j'énonce maintenant le résultat mathématique précis qui correspond à cette affirmation, donc Théorème. Je suppose que u est 4 fois continûment dérivable sur l'intervalle 01, et dans ce cas-là, les données doivent être telles que cette fonction soit 4 fois continûment dérivable sur l'intervalle 01, et dans ce cas-là, je prétends qu'il existe C positif tels que pour tout h, donc h est positif, bien évidemment plus petit que 1 puisque la longueur de la corde est 1, donc il existe C tel que pour tout h, l'erreur au point xi est ui - u(xi), je prends la valeur absolue et je regarde le maximum sur tous les i compris entre 1 et N. Je prétends que cette erreur est plus petite que Ch² Donc démonstration de ce théorème : donc nous avons déjà écrit le schéma, le schéma c'était schéma numérique, je vous rappelle le schéma, le schéma c'était 2ui moins ui-1, la valeur à gauche moins ui + 1, la valeur à droite divisée par h², donc l'approximation de la dérivée seconde = f(xi) et ce schéma, pour tous les i allant de 1 à N, je l'ai écrit de manière plus concise, sous la forme A u=f. A est une matrice tridiagonale des 2 et -1 f est le vecteur qui contient les valeurs f(xi) allant de 1 à N.

Notes

Summary

1m 55s

Chap 10 : Méthode de différences finies (suite)



$u_i \xrightarrow{h \to 0} u(x_i)$?

l'erreur est divisée par $2^2 = 4$ si h est divisé par 2. $O(h^2)$

Thm: $u \in \mathcal{C}^4[0,1]$ $\exists C > 0$ $\forall\, 0 < h < 1$ $\max_{1 \le i \le N} |u_i - u(x_i)| \le Ch^2$.

Dem: schéma: $\dfrac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} = f(x_i)$ $\quad A\vec{u} = \vec{f}$

$$\frac{-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1})}{h^2} = f(x_i) + O(h^2) \qquad A\vec{w} = \vec{f} + \vec{r} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ \vdots \\ u(x_N) \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_N \end{pmatrix}$$

Chap 2

$|r_i| \le Ch^2$

$C = \frac{1}{12} \max_{0 \le x \le 1} |u^{(4)}(x)|$

$$A(\vec{w} - \vec{u}) = \vec{r}$$

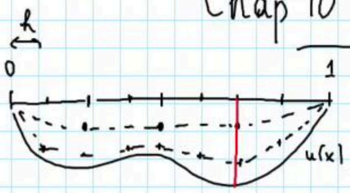
Maintenant la solution exacte, donc u(x) satisfait l'équation suivante, je l'ai écrite tout à l'heure j'avais 2u(xi), ne confondez paz ui et u(xi) ui est l'approximation que je calcule sur l'ordinateur, u(xi) est la valeur exacte au point xi que je ne connais pas. u(x) satisfait 2u(xi) moins u(xi) - 1 et ici -u(xi +1) divisé par h². Tout ceci est égal à f(xi) plus un terme que j'avais noté, O(h²). Donc je vais écrire ceci pour i allant de 1 à N. Je vais écrire ces lignes sous la forme suivante : je vais écrire Aw = f + r, ici w est le vecteur qui contient les valeurs exactes au point xi. Donc u(x1), u(x2)... u(xn). Et puis les restes, donc r est le vecteur de composante R1, R2 jusqu'à Rn. Et d'après le chapitre 2, j'ai démontré que Ri était majoré par quelque chose fois h² et si vous allez regarder la démonstration de la formule de différence finie pour les dérivées seconde, vous allez voir que ce quelque chose, que je note C ici, c'est un douzième du maximum des dérivés quatrième de x en valeur absolue sur l'intervalle 01. Donc j'ai Au=f, Aw, w contient les valeurs exactes aux points x1, x2, xN Aw = f plus un reste qui est majoré par h² et donc si je fais la différence de ces deux lignes, j'obtiens que A(w -u) = f + r - f, c'est-à-dire r.

Notes

Summary

3m 38s

Chap 10 : Méthode de différences finies (suite)



$u_i \xrightarrow{h \to 0} u(x_i)$?

L'erreur est divisée par $2^2 = 4$ si h est divisé par 2. $O(h^2)$

<u>Thm</u>: $u \in \mathcal{C}^4[0,1]$ $\exists C > 0$ $\forall\, 0 < h < 1$ $\max\limits_{1 \le i \le N} |u_i - u(x_i)| \le Ch^2$.

<u>Dem</u>: schéma : $\dfrac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} = f(x_i)$ $\qquad A\vec{u} = \vec{f}$

$$\frac{-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1})}{h^2} = f(x_i) + O(h^2) \qquad A\vec{w} = \vec{f} + \vec{r}$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ \vdots \\ u(x_N) \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_N \end{pmatrix}$$

Chap 2

$|r_i| \le Ch^2$

$C = \frac{1}{12} \max\limits_{0 \le x \le 1} |u^{(4)}(x)|$

$$A(\vec{w} - \vec{u}) = \vec{r}$$

<u>Leme</u>: Soit $\vec{g} \in \mathbb{R}^N$ soit $\vec{v}$ tq $A\vec{v} = \vec{g}$, on a : $\max\limits_{1 \le i \le N} |v_i| \le \frac{1}{8} \max\limits_{1 \le i \le N} |g_i|$

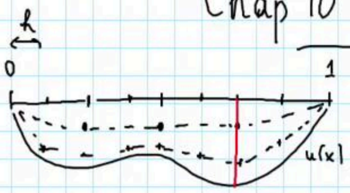
Donc voici l'équation pour le vecteur contenant les erreurs, c'est-à-dire u en x1 - u1, u en x2 - u2 et ainsi de suite. Maintenant j'énonce un petit Leme qui va me permettre de conclure, un lème d'algèbre linéaire que je ne vais pas démontrer, donc soit g, vecteur de R^n quelconque, et soit v tel que Av=g donc ici A est la matrice que je n'ai pas écrite, c'est la matrice 1 sur h^2, 2 sur la diagonale, et -1 sur la sous-diagonale. Donc soit g un vecteur quelconque, et soit v tel que Av=g Alors on a : je prends donc les composantes vi et je regarde le maximum des vi y compris entre 1 et N je prétends que le maximum des composantes vi est plus petit que 1 huitième fois le maximum des gi que je me suis donnés, des composantes gi du vecteur g que je me suis données. Alors grâce à ce lème, je vais pouvoir conclure.

Notes

Summary

6m 05s

Chap 10 : Méthode de différences finies (suite)



$u_i \xrightarrow{h \to 0} u(x_i)$?

L'erreur est divisée par $2^2 = 4$ si h est divisé par 2. $O(h^2)$

Thm: $u \in \mathcal{C}^4[0,1]$ $\exists C>0$ $\forall\, 0<h<1$ $\max\limits_{1\le i\le N} |u_i - u(x_i)| \le C h^2$.

Dém: schéma : $\dfrac{-u_{i-1}+2u_i-u_{i+1}}{h^2} = f(x_i)$ $\qquad A\vec{u} = \vec{f}$

$$\frac{-u(x_{i-1})+2u(x_i)-u(x_{i+1})}{h^2} = f(x_i) + O(h^2) \qquad A\vec{w} = \vec{f} + \vec{r} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ \vdots \\ u(x_N) \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_N \end{pmatrix}$$

Chap 2 $|r_i| \le C h^2$ $\quad C = \frac{1}{12} \max\limits_{0\le x\le 1} |u^{(4)}(x)|$

$A(\vec{w} - \vec{u}) = \vec{r}$

Lemme: Soit $\vec{g} \in \mathbb{R}^N$ soit $\vec{v}$ tq $A\vec{v} = \vec{g}$, on a : $\max\limits_{1\le i\le N} |v_i| \le \frac{1}{8} \max\limits_{1\le i\le N} |g_i|$

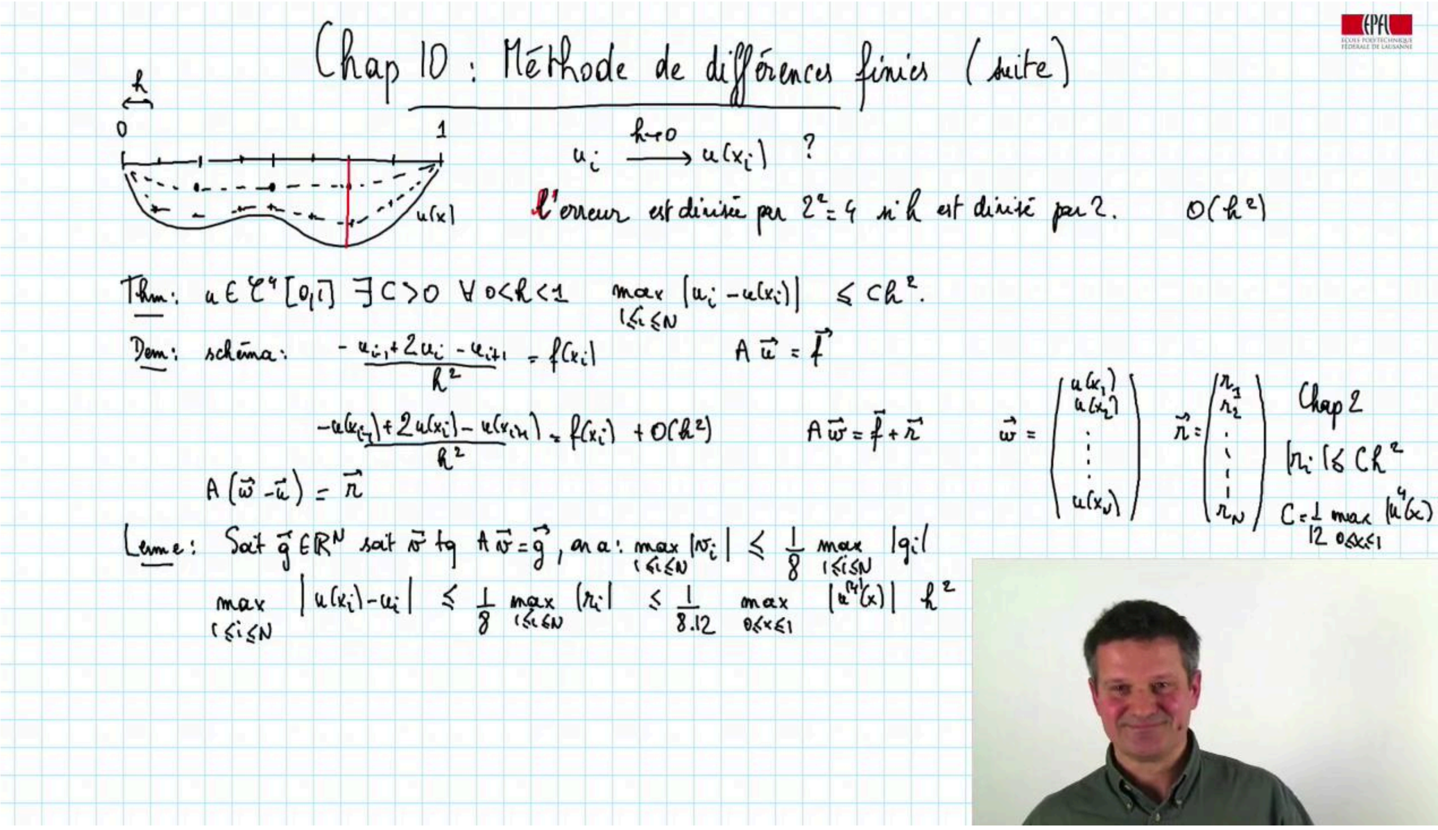
$$\max_{1\le i\le N} |u(x_i) - u_i| \le \frac{1}{8} \max_{1\le i\le N} |r_i| \le \frac{1}{8\cdot 12} \max_{0\le x\le 1} |u^{(4)}(x)|$$

Je vous rappelle que j'ai A(w-u)=r donc j'applique ce lème avec g=r, r est le reste qui vient de la troncature de la formule de Taylor, et puis v est le vecteur w qui contient les valeurs exactes, x1xN - u qui est le vecteur qui contient l'approximation u1 u2 uN Donc j'obtiens le résultat suivant, donc j'applique ce résultat ici, et j'obtiens que le maximum pour tous les i allant de 1 à n, donc ici vi est ici u(xi) -ui, donc je vous rappelle que u(xi) est la déformation exacte de la corde que je ne connais pas et ui est son approximation, que j'ai obtenue sur l'ordinateur en résolvant le système linéaire Au=f Donc le maximum des erreurs qui est ici, eh bien cette quantité-là, grâce à cette inégalité, est majorée par 1 huitième fois le maximum des composantes ri du vecteur r i allant de 1 jusqu'à N Mais je vous ai dit que les ri sont plus petits que Ch² ou C c'est un douzième, maximum des dérivés quatrième de u et donc j'obtiens finalement que ceci est plus petit que 1 sur 8 fois 12, fois le maximum des dérivés quatrième de u sur l'intervalle 01 fois h², qui est ici.

Notes

Summary

7m 29s



J'ai donc bien démontré le théorème que j'ai énoncé, donc maximum de l'erreur majorée par Ch² Voilà le C C dépend des dérivés quatrième de u, mais ne dépend pas de h, conformément à l'énoncé du théorème, qui dit que si u est quatre fois continûment dérivable, il existe C tel que pour tout h, l'erreur est plus petite que Ch² J'ai donc bien démontré le théorème.

Notes

Summary

9m 32s