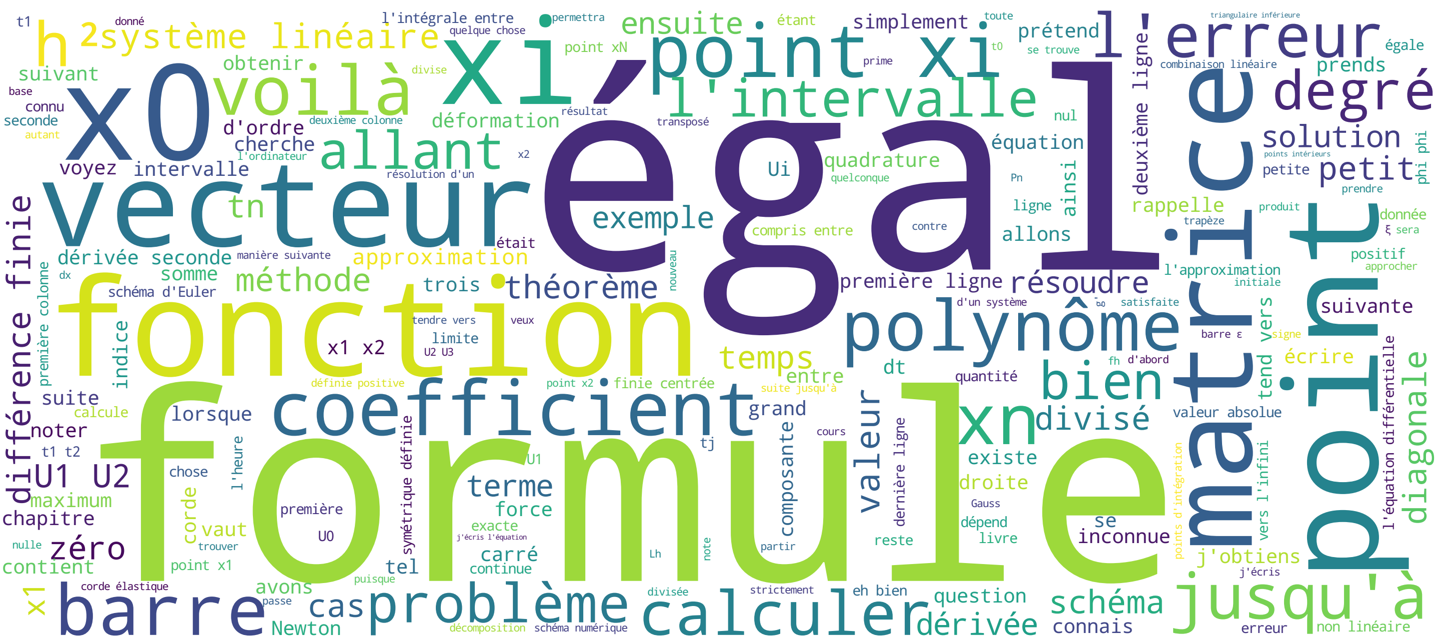
Chapitre 10 : Méthode de différences finies

Introduction à l'analyse numérique

Prof. Marco Picasso

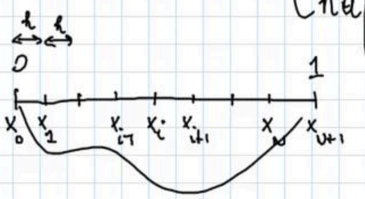


Search MOOC

Video

EPFL

Chap10 : Méthode de différences finies



N entier pos (grand) $h = \frac{1}{N+1}$ pas d'espace (petit)

$x_i = ih \quad i = 0, 1, \dots, N, N+1.$

But : calculer des valeurs u_i approx de $u(x_i)$ $i = 1, 2, \dots, N$

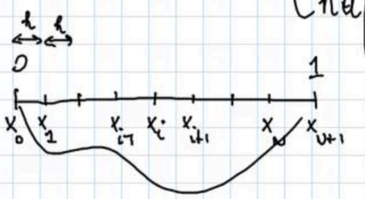
Je vous présente maintenant la méthode de différences finies qui permet d'approcher la solution de notre problème modèle qui est le problème de la corde élastique. Tout d'abord, je vais subdiviser l'intervalle [0-1] qui modélise la corde en sous-intervalles. Donc je coupe en 2, en 4 et ici en 8 Je note x1 le premier point, xN le dernier point intérieur. Ici N est un entier positif, destiné à être grand et je note h = 1/N+1 le pas d'espace qui, lui, est destiné à être petit, si N est grand. N va tendre vers l'infini et h va tendre vers 0 Donc au milieu, j'ai un point xi, à sa gauche xi-h xi+1 à sa droite xi+h, c'est-à-dire xi+1 et puis xi 0 coïncide avec 0 et x indice N+1 coïncide avec 1 donc j'ai bien xi = i fois h i allant de 0 à 1 jusqu'à N+1 Alors le but de la méthode est le suivant le but de la méthode numérique est de calculer, de proposer un schéma qui nous permettra de calculer des valeurs que je vais noter U indice i Ces valeurs Ui sont des approximations de U au point xi que je ne connais pas. Donc je vous rappelle que U de x c'est la déformation de la corde élastique et je ne connais pas U de x Je vais l'approcher au point xi par des approximations que je note Ui pour tous les i allant de 1 a N Ici, je dessine (je ne l'ai pas dit, mais tous les points sont équidistants) h étant la distance entre deux points consécutifs.

Notes

Summary

0m 04s

Chap 10 : Méthode de différences finies



N entier pos (grand) $h = \frac{1}{N+1}$ pas d'espace (petit)

$x_i = ih \quad i = 0, 1, \dots, N, N+1.$

But : calculer des valeurs u_i approx de $u(x_i)$ $i = 1, 2, \dots, N$

$$-u''(x_i) = f(x_i) \qquad i = 1, 2, \dots, N$$

$$-\frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})}{h^2} = f(x_i) + O(h^2)$$

Formule de diff. finie centrée (chap 2)

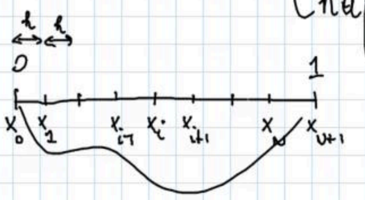
Alors il faut pouvoir écrire un schéma numérique. Pour l'écrire, j'écris l'équation différentielle moins seconde de x égal f de x en ces points x Donc j'écris l'équation différentielle est satisfaite pour tout x compris entre 0 et 1, je l'écris au point xi moins seconde au point xi = f au point xi pour tous les points intérieurs, i allant de 1 jusqu'a N Ensuite j'utilise une formule de différence finie centrée pour approcher la dérivée seconde. Nous avons vu cette formule différence finie dans le chapitre 2. La dérivée seconde au point xi peut être approchée par moins 2 fois la valeur au point xi Vous avez une fois la valeur en xi - h mais xi - h c'est xi - 1 et une fois la valeur en xi + h c'est-à-dire xi + 1 Je divise tout ceci par h² Il y a un signe moins devant la dérivée seconde et donc tout ceci va être égal à f au point xi et, bien sûr, comme j'ai approché la dérivée seconde par cette formule de différence finie il me reste bien évidemment un terme qui est en h² c'est-à-dire un terme qui va être divisé par 4 chaque fois que h est divisé par 2 pour autant que U soit 4 fois continument dérivable et vous savez que dans ce terme en o de h² il y a des dérives quatrième de U sur l'intervalle 0 1 Ceci, nous l'avons vu dans le chapitre 2.

Notes

Summary

2m 10s

Chap 10 : Méthode de différences finies



N entier pos (grand) $\quad h = \frac{1}{N+1}$ pas d'espace (petit)

$x_i = ih \quad i = 0, 1, \dots, N, N+1.$

But : calculer des valeurs u_i approx de $u(x_i)$ $\quad i = 1, 2, \dots, N$

$$-u''(x_i) = f(x_i) \qquad i = 1, 2, \dots, N$$

$$-\frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})}{h^2} = f(x_i) + O(h^2)$$

Formule de diff. finie centrée (chap 2)

schéma : $$\frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} = f(x_i) \qquad i = 1, \dots, N$$

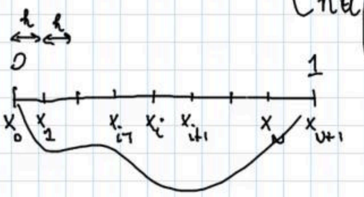
Maintenant je vais écrire un schéma. Un schéma c'est quelque chose que je pourrais ensuite implémenter sur l'ordinateur et qui me permettra justement de calculer ces approximations Ui sur un ordinateur. Donc, pour obtenir le schéma je remplace U au point xi que je ne connais pas, par son approximation Ui que je vais calculer sur l'ordinateur. Et même chose pour U au point xi -1 par Ui -1 et U au point xi +1 par Ui + 1 Donc, j'obtiens le schéma suivant : j'obtiens deux fois Ui A gauche - Ui - 1 et à droite - Ui + 1 le tout divisé par h² Tout ceci doit être égal à f au point xi et j'oublie ce terme en o de h² que, de toute façon, je n'arrive pas à considérer dans mon algorithme. Donc, j'écris que ces relations doivent être satisfaites pour tous les i allant de 1 jusqu'à N donc j'ai consideré ici les points x1 x2 jusqu'a xN, les points intérieurs. Et vous voyez ici dans cette expression que si je prends l'indice i = 1 j'ai ici U1, ici j'ai U2 et ici j'ai U0 Alors que vaut U0 ? U0 c'est la déformation de la corde en x0 cette déformation est nulle.

Notes

Summary

3m 57s

Chap 10 : Méthode de différences finies



N entier pos (grand) $\quad h = \frac{1}{N+1}$ pas d'espace (petit)

$x_i = ih \quad i = 0, 1, \dots, N, N+1.$

But : calculer des valeurs u_i approx de $u(x_i)$ $\quad i = 1, 2, \dots, N$

$$-u''(x_i) = f(x_i) \qquad i = 1, 2, \dots, N$$

$$-\frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})}{h^2} = f(x_i) + O(h^2)$$

Formule de diff. finie centrée (chap 2)

schéma : $\begin{cases} \dfrac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} = f(x_i) & i = 1, \dots, N \\ u_0 = 0 \\ u_{N+1} = 0 \end{cases}$

système linéaire :

$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}$$

$$A \qquad \vec{u} = \vec{f}$$

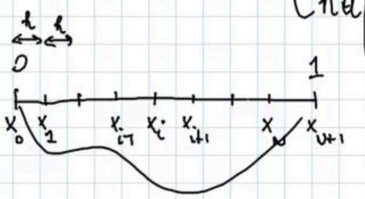
Donc, j'écris que (c'est la condition limite) que U0 = 0 De même, à droite, la déformation de la corde en xN + 1 est nulle et donc j'écris que U indice N + 1 est égal à 0 Voila mon schéma numérique qui me permettra de calculer Ui des approximations de U au point xi pour tous les i allant de 1 jusqu'a N Donc, ce schéma correspond à la résolution d'un système linéaire. Le système linéaire s'écrit de la manière suivante : il y a une matrice que je vais noter A il y a le vecteur des inconnues que je vais noter u Donc le vecteur des inconnues c'est tout simplement les valeurs U1 U2 jusqu'à U N Donc ici U1 U2... jusqu'à U N et, à droite, un vecteur qui est connu, c'est le vecteur qui contient les forces la force au point x1, la force au point x2.... la force au point xN Je vais noter f ce vecteur Je prétends que ce schéma correspond à la résolution d'un système linéaire. Alors, reste à déterminer ce que vaut la matrice.

Notes

Summary

5m 15s

Chap 10 : Méthode de différences finies



N entier pos (grand) $\quad h = \frac{1}{N+1}$ pas d'espace (petit)

$x_i = ih \quad i = 0, 1, \dots, N, N+1.$

But : calculer des valeurs u_i approx de $u(x_i)$ $\quad i = 1, 2, \dots, N$

$$-u''(x_i) = f(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$-\frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})}{h^2} = f(x_i) + O(h^2)$$

Formule de diff. finie centrée (chap 2)

schéma : $\begin{cases} \dfrac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} = f(x_i) & i = 1, \dots, N \\ u_0 = 0 \\ u_{N+1} = 0 \end{cases}$

système linéaire :

$$\underbrace{\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & (0) \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ (0) & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}}_{\vec{u}} = \underbrace{\begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}}_{\vec{f}}$$

A est sym. déf. pos. $\quad A = LL^T$

Vous voyez ici que, sur chaque ligne, il y a 1 sur h² donc je mets 1 sur h² ici et si je regarde la première ligne pour l'indice i = 1 U0 est nul, j'ai 2 U1 - U2 / h² qui est égal à f au point x1 donc, sur la première ligne j'ai 2 U1 - U2 Sur la deuxième ligne, j'ai ici - U1 + 2 U2 - U3 / h² égal f (x2) Donc sur la deuxième ligne, je vais écrire - U1 + 2 U2 - U3 et ainsi de suite jusqu'à l'avant-dernière ligne - 1 2 -1 et sur la dernière ligne je vais avoir -1 et 2 Donc j'ai ici à faire a une matrice tridiagonale. Sur la diagonale, vous avez un 2 sur la sous-diagonale vous avez un -1 et sur la sur-diagonale vous avez aussi un -1 Donc je vais maintenant calculer des approximations U1 U2 UN de U au point x1 U au point x2 U au point xN en résolvant ce système linéaire et je prétends que la matrice A cette matrice qui contient 1 sur h² 2 sur la diagonale et - 1 sur la sur et la sous-diagonales (cette matrice est tri-diagonale et contient des 0 ailleurs) et bien cette matrice est symétrique définie positive et donc je peux utiliser la décomposition de Cholesky A = LL t pour résoudre ce système linéaire A U = f

Notes

Summary

6m 41s