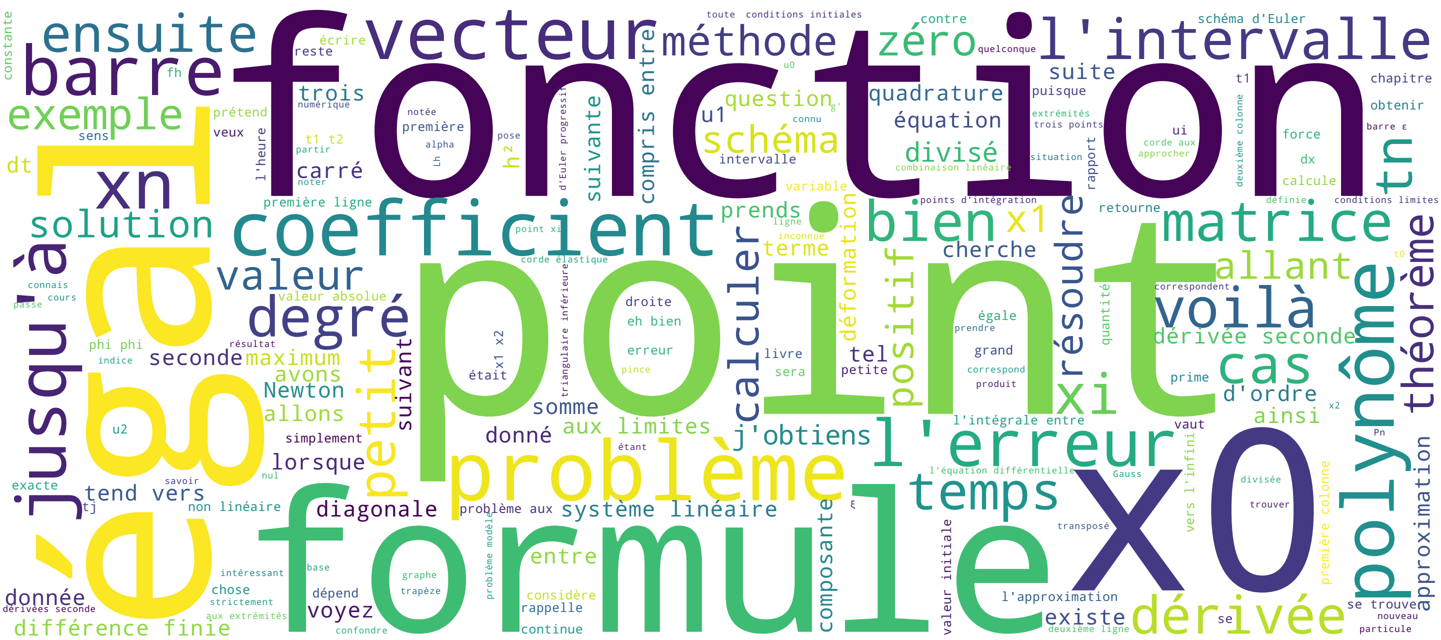
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Chapitre 10 : Problèmes aux limites unidimensionnels (suite)

Introduction à l'analyse numérique

Prof. Marco Picasso



Search MOOC

Video

EPFL

Chap 10 : Pbm aux limites 1D

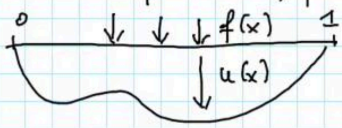
Pbm modèle :

donné $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)$

cherché $u : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \to u(x)$ tq

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

Corde élastique tendue, pincée x=0 et x=1



Le problème que je veux résoudre aujourd'hui est le suivant. Problème modèle : Donc, ce qui est donné, c'est une fonction *f*, définie sur l'intervalle [0, 1], à valeur dans *R*, qui à *x*, retourne *f(x)*. Et ce qu'on cherche, c'est une fonction *u*, l'inconnue du problème, définie sur l'intervalle [0, 1] dans *R*, qui à *x*, retourne *u(x)*. Et cette fonction *u* doit satisfaire l'équation différentielle suivante : moins seconde de *x*, donc ici, *u seconde*, c'est la dérivée seconde par rapport à la seule variable qui est *x*. Donc, moins seconde de *x* = *f(x)*. *x* compris entre 0 et 1. Avec comme conditions : *u*, en x = 0 égal 0, et *u*, en x = 1, aussi égal à 0. Donc la situation physique qui correspond à ce problème est la suivante : on considère une corde élastique, tendue et pincée aux extrémités. Les extrémités sont x = 0 et x = 1. Je fais le dessin suivant, voilà l'intervalle [0, 1]. Donc j'appuie sur cette corde élastique avec une force *f(x)*, au point x, et sous l'effet de cette force, la corde se déforme et j'appelle *u(x)* la déformation.

Notes

Summary

0m 03s

Chap 10 : Pbm aux limites 1D

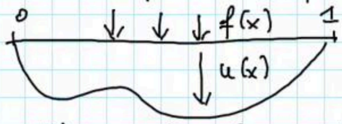
Pbm modèle :

donné $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)$

cherché $u : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \to u(x)$ tq

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

Corde élastique tendue, pincée x=0 et x=1



problème modèle (toy pbm)

$$-u''(x) + c(x)\,u(x) = f(x) \qquad c \geq 0$$

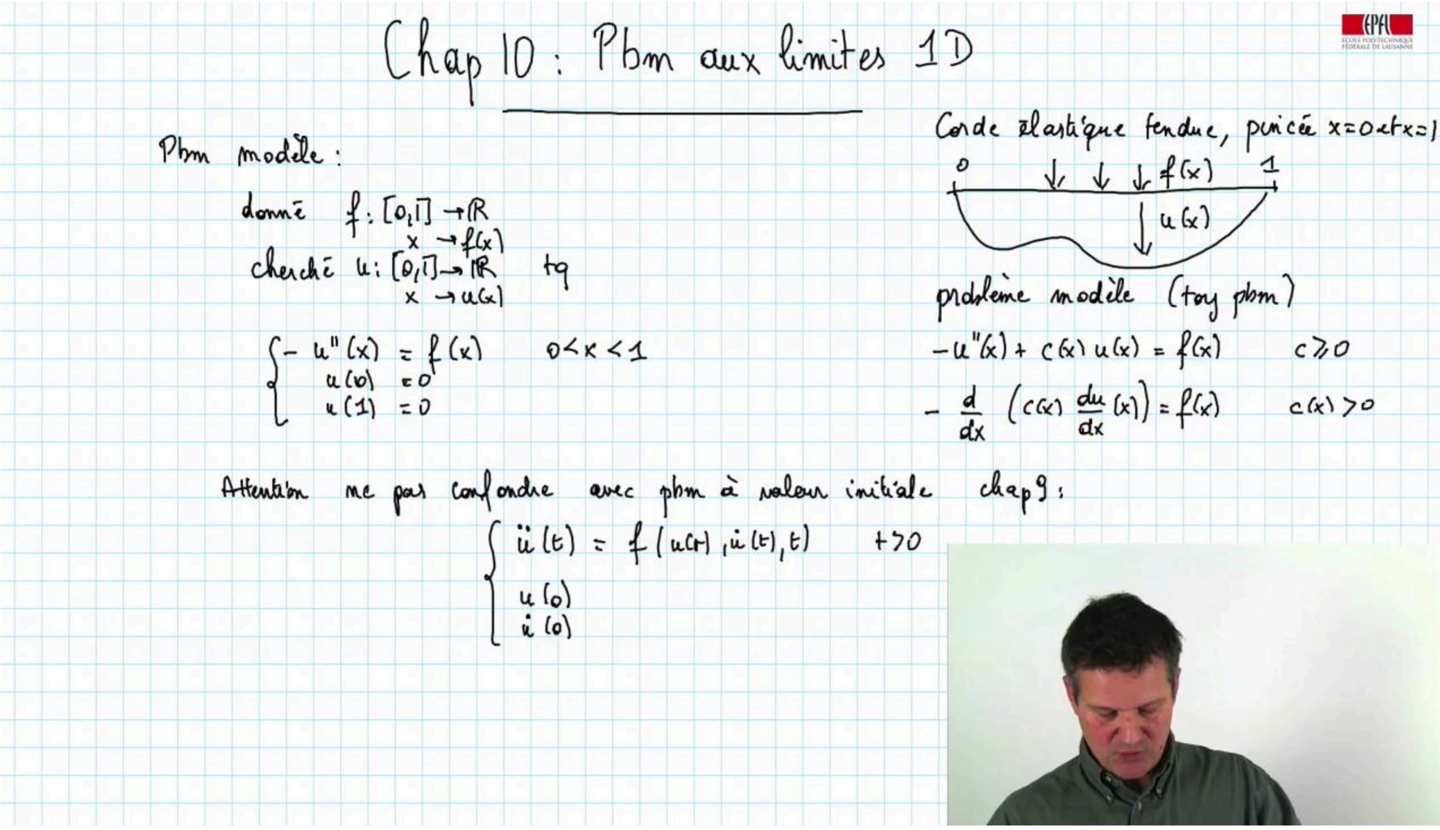
$$-\frac{d}{dx}\left(c(x)\,\frac{du}{dx}(x)\right) = f(x$$

Et comme je pince la corde aux extrémités, x = 0 et x = 1, la déformation est nulle en x = 0 et en x = 1. Alors ce problème est un problème modèle au sens où il a été simplifié. Les anglais appellent ce modèle « toy problem ». Et il faut savoir déjà que je peux résoudre ce problème facilement, il suffit d'intégrer deux fois *f*, j'ai deux constantes qui interviennent lors de ces deux intégrations. Et j'obtiens ces deux constantes en utilisant les deux conditions aux limites. Néanmoins, ce problème est intéressant et va nous permettre d'étudier une méthode numérique. Des problèmes plus intéressants sont les suivants : par exemple, si je considère moins *u* seconde de *x*, plus *c(x)*, ici, *c* est une fonction donnée de la variable *x*, fois *u(x)* = *f(x)*, qui est aussi donné. Ce problème est un problème lié à la déformation des poutres. Et si *c(x)* est positif pour tout x, et bien c'est un problème qui est bien posé, qui admet une unique solution. Et un autre problème aux limites avec une dérivée seconde est le suivant : *d/d(x)* de *c(x)du/dx(x)* égal *f(x)*.

Notes

Summary

1m 42s

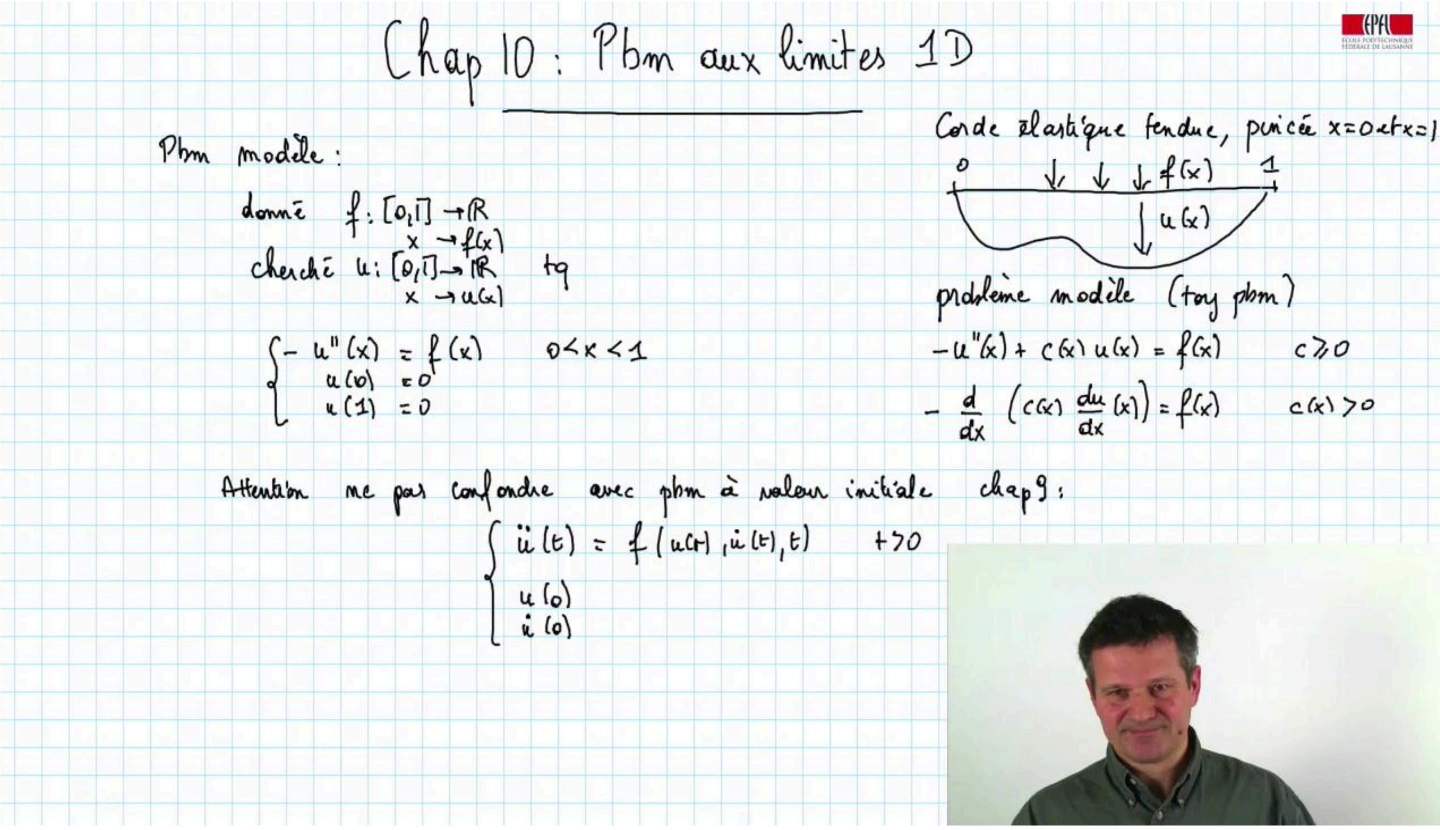


Cette fois-ci, je vais demander que *c*, en tout point x, soit strictement positif, et ce problème pourrait correspondre à une situation où les propriétés de la corde sont différentes, en tout point x, compris entre 0 et 1. Alors, il faut noter que ce problème s'appelle problème aux limites parce qu'il y a deux conditions limites. Ne pas confondre ce problème avec un problème à valeur initiale que nous avons vu dans le Chapitre 9. Attention. Ne pas confondre avec un problème à valeur initiale. Alors le problème à valeur initiale donc, du Chapitre 9, c'était le problème suivant : c'était masse fois accélération = force. Donc un problème de type : *u point point de t* = les forces que j'applique à une particule, ces forces peuvent dépendre de *u(t)*, éventuellement *u point (t)* et de *t*, pour t positif. Donc masse fois accélération égal force extérieure sur une particule avec deux conditions initiales : *u* en 0 qui est donné et la dérivée *u point* en 0 qui est aussi donnée. Donc vous voyez ici qu''il y a aussi une dérivée seconde, qui est notée *point* dans les manuels de physique. Ici, la dérivée est notée *prime*.

Notes

Summary

3m 18s



Donc il y a, dans les deux équations, des dérivées seconde. Mais ici, il s'agit d'un problème aux limites où on a fixé deux conditions limites qui correspondent au fait que je pince la corde aux deux extrémités. Et ici, il y a deux conditions initiales qui correspondent au fait que quand je lâche l'objet, je dois préciser quelle est sa position, et sa vitesse.

Notes

Summary

4m 56s