Chapitre 9 : Résumé

Introduction à l'analyse numérique

Prof. Marco Picasso

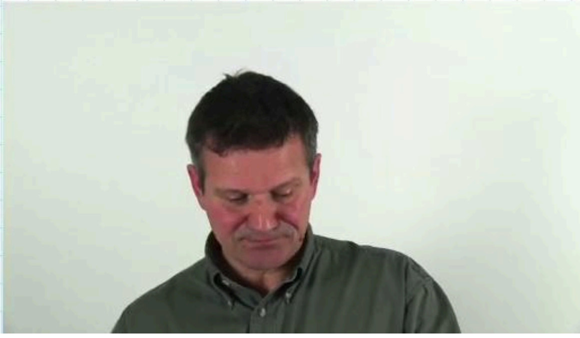
Search MOOC

Video

EPFL

Chap 9- Equations différentielles - Résumé

- Eq. diff. $\begin{cases} \dot{u}(t) = f(u(t),t) & t>0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$
  - Théorème 9.1 : sol. globale unique (p ex $f \in C^1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \leq K$)
  - sch. d'Euler progressif : $\frac{u^{n+1}-u^n}{h} = f(u^n,t_n)$ u^n approx de $u(t_n)$ explicite
  - " " rétrograde : $\frac{u^{n+1}-u^n}{h} = f(u^{n+1},t_{n+1})$ implicite, Newton
  - stabilité $\begin{cases} \dot{u}(t) = -\beta u(t) & t>0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$ $\beta>0$ EP: stable si $h < \frac{2}{\beta}$; ER : stable $\forall h>0$
  - sch. d'ordre un en h : $|u(t_n) - u^n| = O(h)$
  - " " supérieur
- Syst d'éq. diff. $\begin{cases} \dot{\vec{u}}(t) = \vec{f}(\vec{u}(t),t) \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0 \end{cases}$
  - EP $\frac{\vec{u}^{n+1}-\vec{u}^n}{h} = \vec{f}(\vec{u}^n, t_n)$ expl.
  - ER " $= \vec{f}(\vec{u}^{n+1}, t_{n+1})$ impl. Newton.

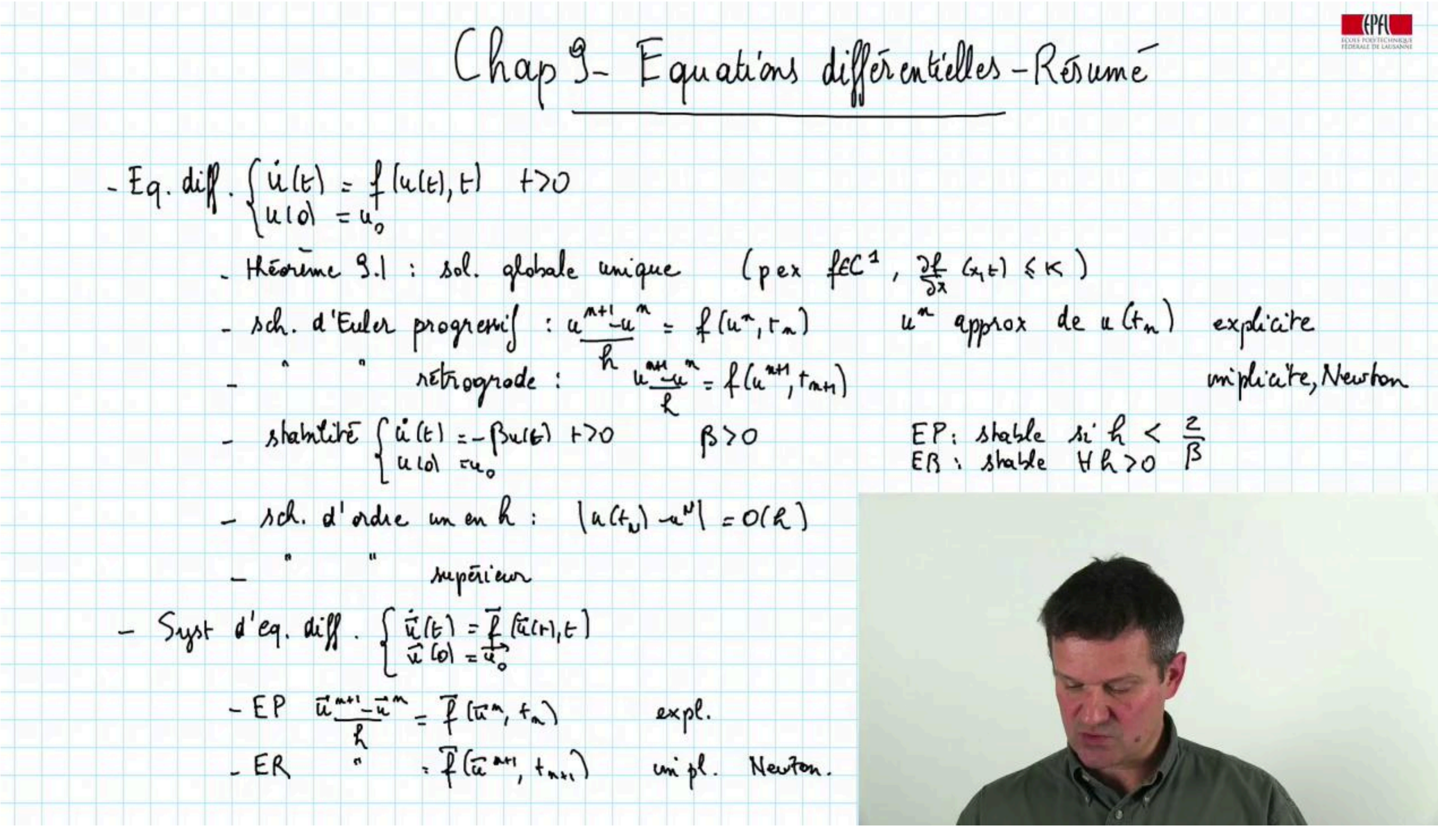


Dans ce chapitre 9 **Equations différentielles** nous avons abordé les points suivants : nous avons tout d'abord considéré le cas d'une équation différentielle du 1er ordre u point (t) = f (u(t),t) Nous avons vu que il y a plusieurs situations dans le cas où il y a une solution unique pour tout temps t et des situations où il y a plusieurs solutions au problème, et des situations où il y a une solution jusqu'à un certain temps et ensuite explosion. Donc, nous avons énoncé un théorème qui nous permet d'affirmer que sous certaines conditions, le problème admet une solution globale et unique. Par exemple, si les fonctions f C^1, si la dérivée par rapport à la 1ere variable de la fonction f est bornée: c'est le cas.

Notes

Summary

0m 04s

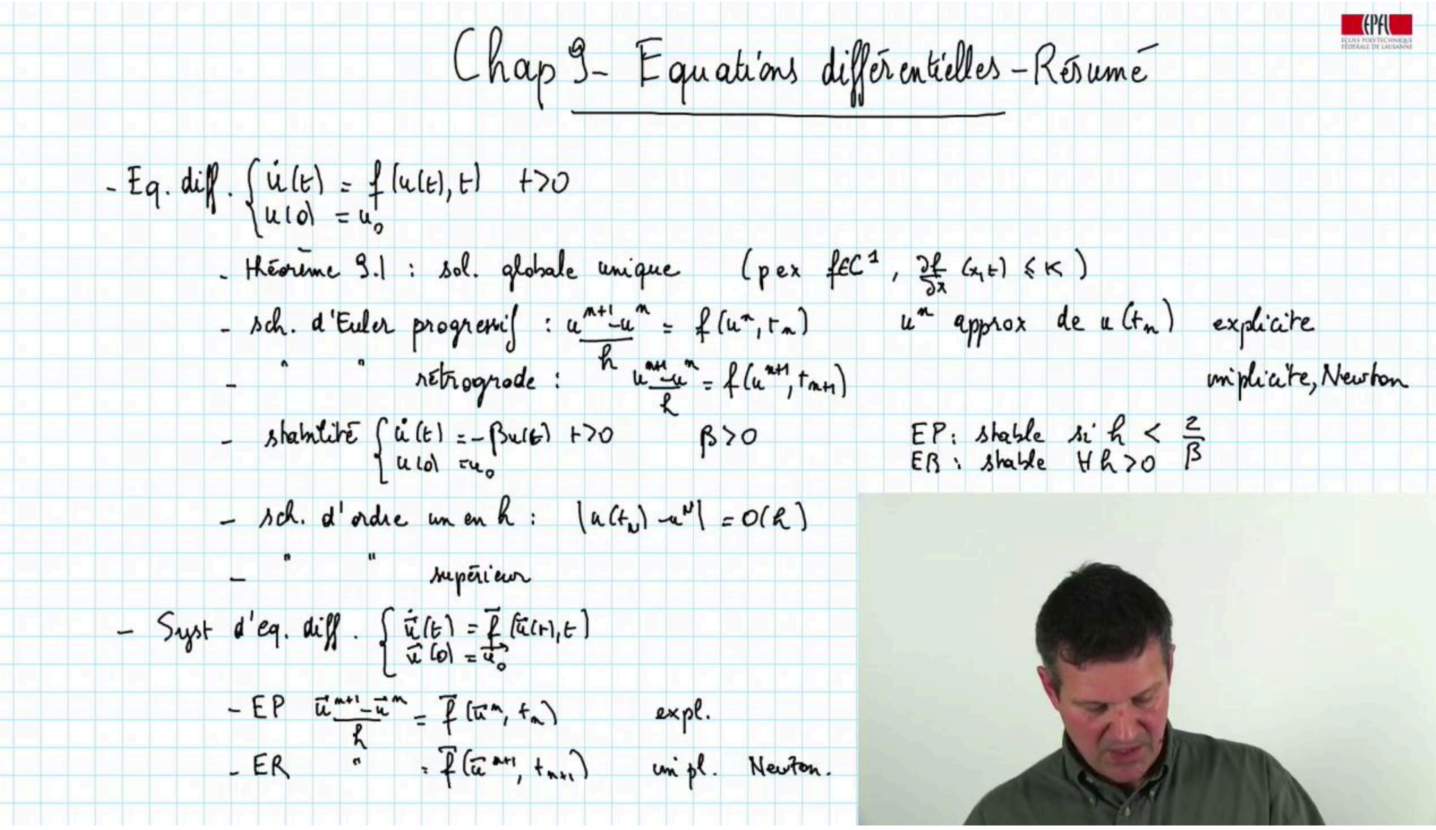


Nous avons ensuite proposé le schéma d'Euler progressif pour approcher la solution du problème, donc ici u^n est une approximation de u au temps (tn); t(n), c'est n fois h (h est le pas de temps) et le schéma s'écrit (u^(n+1)-u^n) / h = f(u^n, tn) ce schéma est explicite dans le sens où on peut expliciter u^(n+1) en fonction de u^n u^(n+1), c'est u^n + h(f(u^n,tn)) Nous avons ensuite présenté le schéma d'Euler rétrograde qui s'écrit (u^(n+1)-u^n)/h= f(u^(n+1),t(n+1)) et cette fois-ci, il y a une relation implicite entre u^n et u^(n+1) donc on ne peut pas expliciter u^(n+1) en fonction de u^n mais il faut trouver le 0 d'une certaine fonction pour obtenir u^(n+1) Donc on peut appliquer la méthode de Newton pour trouver le 0 de cette fonction. Nous avons ensuite abordé la question de la stabilité des schémas sur l'équation différentielle u point (t)= -βu(t) pour un β positif donc la solution de cette équation est u(0) exponentiel moins β(t) nous avons dit que le schéma était stable si la limite quand n tend vers l'infini de u^n était égal à 0. Ceci est le cas pour le schéma d'Euler progressif sous la condition h < 2/β le pas de temps doit donc être plus petit que 2 sur β, β étant le coefficient qui est ici.

Notes

Summary

0m 50s



Donc cette condition peut être restrictive et peut demander des pas de temps petits. Par contre, dans le cas du schéma d'Euler rétrograde, nous avons démontré que le schéma était stable pour tout pas de temps h. Les deux schémas d'Euler convergent à l'ordre 1 en h par exemple, pour cette équation différentielle là, on peut montrer que l'erreur au temps final tn, moins l'approximation u^n est d'ordre 1 en h, au sens où l'erreur est divisée par 2 chaque fois que h est divisé par 2, et le nombre de pas de temps est multiplié par 2 pour arriver au même temps final. Ceci reste vrai par exemple dans le cas d'une fonction f de x et de t qui serait lipschitzienne par rapport à la 1ère variable. Nous avons abordé très rapidement la question des schémas d'ordre supérieur, nous avons présenté un schéma d'ordre 2 mais il faut savoir qu'il y a une grosse littérature sur des schémas d'ordre plus élevé que l'ordre 1.

Notes

Summary

2m 15s

Chap 9 - Equations différentielles - Résumé

- Eq. diff. $\begin{cases} \dot{u}(t) = f(u(t), t) & t>0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$
  - Théorème 9.1 : sol. globale unique (p ex $f \in C^1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \leq K$)
  - sch. d'Euler progressif : $\frac{u^{n+1}-u^n}{h} = f(u^n, t_n)$ u^n approx de $u(t_n)$ explicite
  - " " rétrograde : $\frac{u^{n+1}-u^n}{h} = f(u^{n+1}, t_{n+1})$ implicite, Newton
  - stabilité $\begin{cases} \dot{u}(t) = -\beta u(t) & t>0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$ $\beta > 0$ EP: stable si $h < \frac{2}{\beta}$; ER: stable $\forall h > 0$
  - sch. d'ordre un en h : $|u(t_N) - u^N| = O(h)$
  - " " supérieur
- Syst d'eq. diff. $\begin{cases} \dot{\vec{u}}(t) = \vec{f}(\vec{u}(t), t) \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0 \end{cases}$
  - EP $\frac{\vec{u}^{n+1}-\vec{u}^n}{h} = \vec{f}(\vec{u}^n, t_n)$ expl.
  - ER " $= \vec{f}(\vec{u}^{n+1}, t_{n+1})$ impl. Newton.

Nous avons ensuite étendu ces méthodes au cas de systèmes d'équations différentielles il suffit de mettre un vecteur sur u^(n+1) (u^(n+1) vecteur - u^n vecteur) /h = f vecteur de u^n vecteur au temps tn ceci est un schéma explicite, on peut expliciter le vecteur u^(n+1) en fonction du vecteur u^n u^(n+1), c'était u^n+ h (f(u^n,tn)) dans le cas du schéma d'Euler rétrograde, donc (u^(n+1)-u^n)/h = f(u^(n+1),t(n+1)) cette fois-ci, il faut résoudre un système d'équation non-linéaire à chaque pas de temps pour trouver u^(n+1) en fonction de u^n et on peut à nouveau utiliser la méthode de Newton pour résoudre ce système d'équation non-linéaire.

Notes

Summary

3m 12s