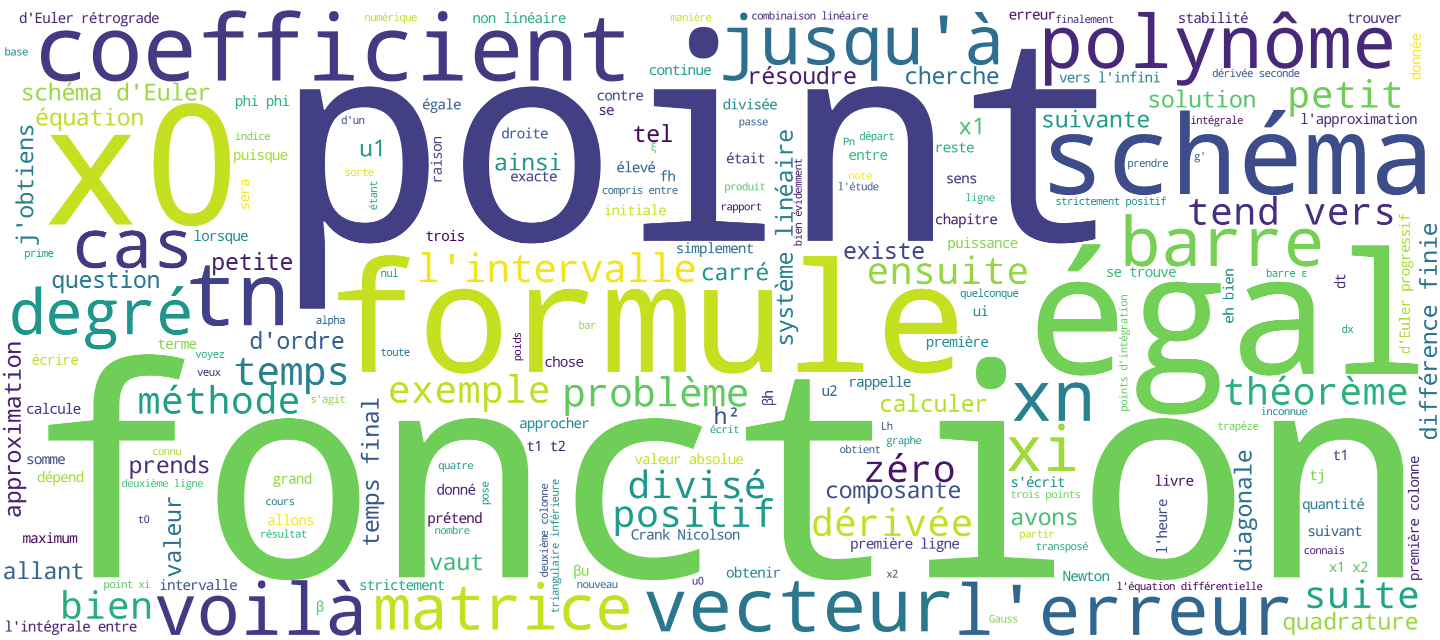
Chapitre 9 : Schémas d'ordre supérieur

Introduction à l'analyse numérique

Prof. Marco Picasso



[Search MOOC](#)

[Video](#)

Chap 9- Schémas d'ordre supérieur

Sch Euler progr: $\frac{u^{n+1}-u^n}{h} = f(u^n,t_n)$

— rétr $\frac{u^{n+1}-u^n}{h} = f(u^{n+1},t_{n+1})$

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{h} = \frac{1}{2}\left(f(u^n,t_n)+f(u^{n+1},t_{n+1})\right)$$ Crank-Nicolson

ordre 2 en h: $|u(t_N)-u^N| = O(h^2)$ Si h div. par 2 et N mult. par 2, l'erreur est divisée par 4.

Alors il existe une multitude de schémas d’ordre plus élevé que les schémas d'Euler D'ordre 2,3,4 et ainsi de suite, il y a des livres entiers consacrés à l'étude de ces schémas; je n'en donnerai qu'un ici, c'est le schéma de Crank-Nicolson. Pour l'instant nous avons vu le schéma d'Euler progressif qui s'écrit *u^(n+1) - u^n* sur *h* donc l'approximation de la dérivée au temps *tn = f(u^n,tn)* Le schéma d'Euler rétrograde qui s'écrit *(u^(n+1) - u^n)/h* égal *f*, cette fois-ci de *u^(n+1),tn+1* et donc si on fait la moyenne de ces 2 schémas on obtient : *(u^(n+1) - u^n)/h = 1/2 (f(u^n,tn) + f(u^(n+1),tn+1))* On l'appelle Schéma de Crank-Nicolson. Ce schéma est d'ordre 2 en *h*, au sens où, si on refait l'expérience précédente, c'est à dire qu'on cherche à approcher *u* à un certain temps final, on note donc *u^N* son approximation et bien l'approximation au temps final est en *O(h²)* l'erreur au temps final est en *O(h²)* au sens où si *h* est divisé par 2 et le nombre de pas de temps est multiplié par 2 de sorte à arriver au même temps final, et bien l'erreur *u(tn)-u^N* est divisée cette fois-ci par 4 (par 2 au carré, c'est à dire 4).

Notes

Summary

0m 03s

Chap 9 - Schémas d'ordre supérieur

Sch Euler progr : $\frac{u^{n+1}-u^n}{h} = f(u^n, t_n)$

— rétr $\frac{u^{n+1}-u^n}{h} = f(u^{n+1}, t_{n+1})$

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{h} = \frac{1}{2}\left[f(u^n, t_n) + f(u^{n+1}, t_{n+1})\right]$$ Crank-Nicolson

ordre 2 en h : $|u(t_N) - u^N| = O(h^2)$ Si h div. par 2 et N mult. par 2, l'erreur est divisée par 4.

Stabilité : $\frac{u^{n+1}-u^n}{h} = \frac{1}{2}\left(-\beta u^n - \beta u^{n+1}\right)$ $u^{n+1} = u^n \frac{1-\frac{\beta h}{2}}{1+\frac{\beta h}{2}}$ $u^{n+1} = u^0 \left(\frac{1-\frac{\beta h}{2}}{1+\frac{\beta h}{2}}\right)^{n+1}$

$\displaystyle u^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \iff \left|\frac{1-\frac{\beta h}{2}}{1+\frac{\beta h}{2}}\right| < 1 \implies$ toujours le cas $\forall h > 0$

Étudions la stabilité de ce schéma, qui s'étudie sur l'équation différentielle *u* point = - *βu* où *β* est positif Le schéma de Crank-Nicolson s'écrit dans ce cas-là : *(u^(n+1) - u^n)/h = 1/2 (-βu^n -βu^(n+1))*. Donc je peux écrire ce schéma d'une autre manière : j'ai *u^(n+1) = u^n* fois *1-βh/2* divisé par *1 + βh/2* Donc *u^(n+1)*, par induction, c'est égal à la condition initiale *u^0* fois la raison, qui est cette fois-ci *(1-βh/2)/(1 + βh/2)*, élevé à la puissance *(n+1)* et *u^(n+1)* tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, si et seulement si la raison est plus petite que 1 en valeur absolue (strictement plus petite que 1). Donc il suffit d'étudier la fonction *1-x* sur *1+x*, *x* strictement positif, donc quand *x* vaut 0, cette fonction vaut 1 quand *x* tend vers plus l'infini, cette fonction *1-x* sur *1+x* vaut -1, et donc, pour tout *h*-- ceci est toujours le cas, sous-entendu pour tout *h* positif, cette quantité là est strictement plus petite que 1, pour tout *h* positif. Je vous rappelle ici que dans l'étude de la stabilité, *β* est strictement positif.

Notes

Summary

1m 56s

Chap 9 - Schémas d'ordre supérieur

Sch Euler progr : $\dfrac{u^{n+1}-u^n}{h} = f(u^n, t_n)$

— rétr $\dfrac{u^{n+1}-u^n}{h} = f(u^{n+1}, t_{n+1})$

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{h} = \frac{1}{2}\left(f(u^n,t_n) + f(u^{n+1},t_{n+1})\right)$$ Crank-Nicolson

ordre 2 en h : $|u(t_N) - u^N| = O(h^2)$ Si h div. par 2 et N mult. par 2, l'erreur est divisée par 4.

Stabilité : $\dfrac{u^{n+1}-u^n}{h} = \dfrac{1}{2}\left(-\beta u^n - \beta u^{n+1}\right)$ $\quad u^{n+1} = u^n \dfrac{1-\frac{\beta h}{2}}{1+\frac{\beta h}{2}}$ $\quad u^{n+1} = u^0 \left(\dfrac{1-\frac{\beta h}{2}}{1+\frac{\beta h}{2}}\right)^{n+1}$

$u^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \iff \left|\dfrac{1-\frac{\beta h}{2}}{1+\frac{\beta h}{2}}\right| < 1 \implies$ toujours le cas $\forall h > 0$

le sch. de CN est inconditionnellement stable (idem ER)

Autres schémas : BDF 2, Runge !

Donc le schéma de Crank-Nicolson est, comme le schéma d'Euler, rétrograde, inconditionnellement stable, comme le schéma d'Euler, rétrograde, c'est à dire stable sans conditions sur *h*. Alors, il existe bien évidemment d'autres schémas, par exemple le schéma BDF 2. Il existe des schémas qui s'appellent les schémas de Runge Kutta, qui peuvent être implicites ou explicites, d'ordre 1,2,3 et ainsi de suite. Et donc ce que je vous présente ici, c'est vraiment une infime partie de la littérature qu'on peut trouver sur tous ces schémas.

Notes

Summary

3m 53s