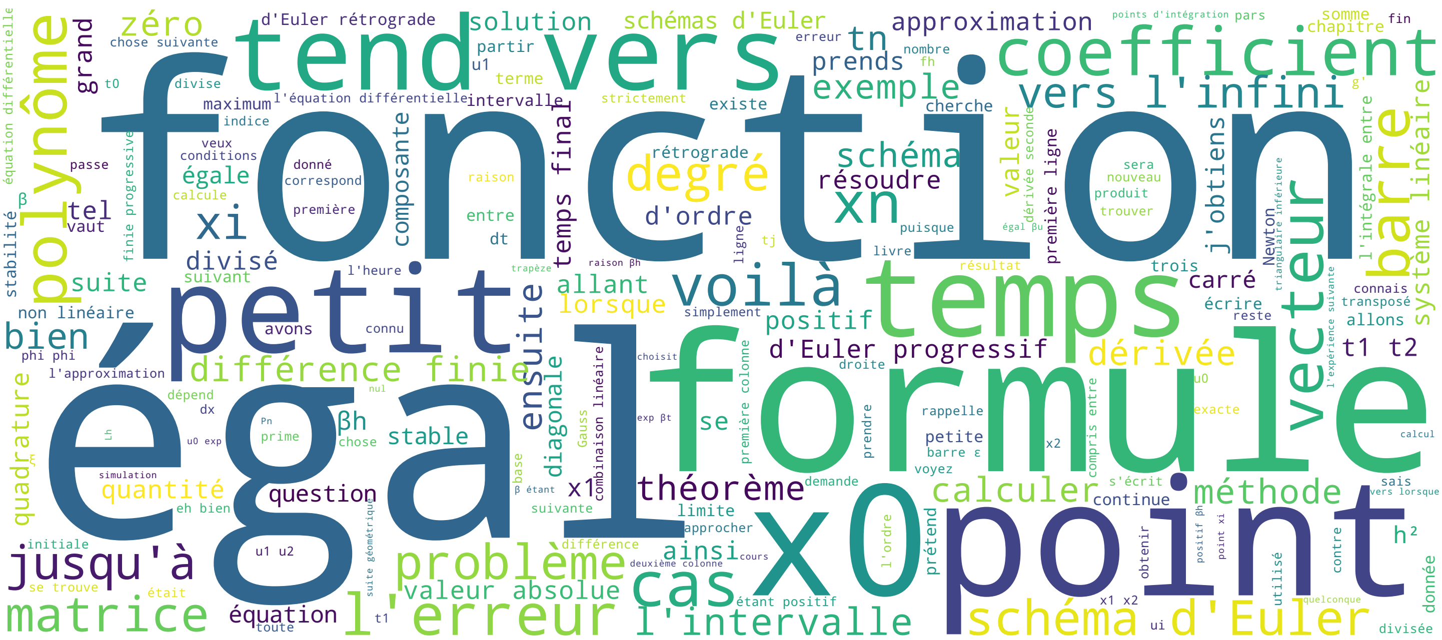
Chapitre 9 : Stabilité des schémas d'Euler

Introduction à l'analyse numérique

Prof. Marco Picasso



Search MOOC

Video

Chap 9- Stabilité des schémas d'Euler

$$\beta > 0 \quad \begin{cases} \dot{u}(t) = -\beta u(t) & t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \qquad u(t) = u_0\, e^{-\beta t}$$

$$\lim_{t \to \infty} u(t) = 0$$

sch. num. $u^0, u^1, u^2, \ldots, u^n, u^{n+1}$

Déf: le sch. est stable si $\lim_{n \to \infty} u^n = 0$

Je vais étudier la stabilité des schémas d'Euler sur l'équation différentielle suivante: On se donne un β positif, et on considère l'équation différentielle u°(t)= -βu(t) pour t positif avec une condition initiale u(0)=u0 L'unique solution de ce problème est donnée par u(t)= u0 exp(-βt) et donc je peux tracer la solution, -voilà t- Je pars de u0, et voilà u0 exp(-βt) Donc je remarque entre autres, que la limite quand t tend vers l'infini de u(t) est égale à 0. Ce que je vais demander c'est la chose suivante: J'ai un schéma numérique qui m'a permis de calculer des approximations u^0, u^1, u^2, u^n et à partir de u^n, u^n+1. u^n+1 est une approximation de u au temps t(n+1) et j'aimerais reproduire du point de vue numérique cette propriété. Je demande la chose suivante: définition, on dira que le schéma est stable. Il y a plusieurs notions de la stabilité, celle-ci est la plus simple: le schéma est stable si limite quand n tend vers l'infini de u^n égal 0.

Notes

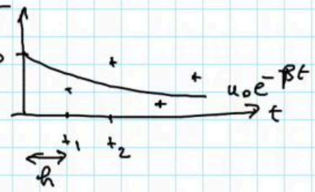
Summary

0m 04s

Chap 9- Stabilité des schémas d'Euler

$\beta > 0 \quad \begin{cases} \dot{u}(t) = -\beta u(t) & t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$ $\qquad u(t) = u_0 \, e^{-\beta t}$

$\lim_{t \to \infty} u(t) = 0$



sch. num. $u^0, u^1, u^2, \ldots, u^n, u^{n+1}$

Déf: le sch. est stable si $\lim_{n \to \infty} u^n = 0$

sch. Euler progressif: $\frac{u^{n+1} - u^n}{h} = -\beta u^n \qquad u^{n+1} = (1-\beta h) u^n = (1-\beta h)^{n+1} u^0 \xrightarrow{n \to \infty} 0 \iff |1-\beta h| < 1 \iff -1 < 1-\beta h < 1$

$\iff \beta h < 2$

$\iff h < \frac{2}{\beta}$

Dans ce cas-là j'ai des apporximations ici t1, t2 etc et je demande que ces approximations tendent vers 0 lorsque n tend vers l'infini Considérons maintenant le schéma d'Euler progressif pour cette équation différentielle, il s'écrit u^n+1 - (u^n)/h (h le pas de temps) t(n)=n*h égal -βu^n c'est-à-dire u^n+1 = (1 - βh)*u^n donc c'est une suite géométrique de raison (1 - βh) donc u^n+1 est égal à (-βh)^n+1 * u^0 Cette quantité-là tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini si et seulement si la raison (1-βh) en valeur absolue est strictement plus petit que 1 c'est-à-dire si et seulement si (1-βh) est comprise entre -1 et 1 Donc β étant positif, h étant positif 1-βh est toujours plus petit que 1 par contre l'autre inégalité me donne βh plus petit que 2 c'est-à-dire h plus petit que 2/β Donc je ne peux utiliser le schéma d'Euler progressif que si h est plus petit que 2/β Que se passe-t-il dans le cas contraire? Si je prends un h qui est plus grand que 2/β u^n tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini ce qui n'est pas une propriété souhaitable parce que je sais que la solution tend vers 0.

Notes

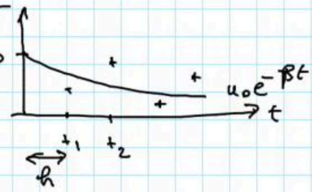
Summary

1m 36s

Chap 9 - Stabilité des schémas d'Euler

$\beta > 0 \quad \begin{cases} \dot{u}(t) = -\beta u(t) & t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \qquad u(t) = u_0 e^{-\beta t}$

$\lim_{t \to \infty} u(t) = 0$



sch. num. $u^0, u^1, u^2, \ldots, u^n, u^{n+1}$

Déf: le sch. est stable si $\lim_{n \to \infty} u^n = 0$

sch. Euler progressif: $\frac{u^{n+1} - u^n}{h} = -\beta u^n \qquad u^{n+1} = (1-\beta h) u^n = (1-\beta h)^{n+1} u^0 \xrightarrow{n \to \infty} 0 \iff |1-\beta h| < 1 \iff -1 < 1-\beta h < 1$

$\iff \beta h < 2$

$\iff h < \frac{2}{\beta}$

sch. Euler rétrograde: $\frac{u^{n+1} - u^n}{h} = -\beta u^{n+1} \qquad u^{n+1} = u^n \frac{1}{1+\beta h} = u^0 \left(\frac{1}{1+\beta h}\right)^{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \iff$

$\frac{1}{1+\beta h} < 1$ toujours le cas $\forall h$

Convergence des sch

Cette condition est donc pénalisante, parce que si β est grand alors le pas de temps doit être petit Donc si je veux faire une simulation, par exemple, dans le cas de la météo pendant 24 heures, je serai obligé d'utiliser des petits pas de temps, ce qui n'est pas souhaitable. Passons maintenant au schéma d'Euler rétrograde Le schéma d'Euler rétrograde sur cette équation différentielle s'écrit u^n+1 - (u^n)/h égal -βu^n+1 c'est-à-dire u^n+1 égal u^n * 1/1+βh De nouveau une suite géométrique de raison, cette fois-ci, 1/1+βh Par induction, u^n+1 égal u0* (1/1+βh)^n+1 et cette quantité-là tend vers 0 quand n tend vers l'infini si et seulement si la raison est plus petite que 1. 1/1+βh β étant positif, h est positif cette quantité-là est positive -je peux enlever la valeur absolue- est plus petit que 1, ce qui est toujours le cas sous-entendu, pour tout h positif 1/1+βh est plus petit que 1 il suffit d'étudier la fonction 1/1+x avec x positif. Donc ce schéma d'Euler rétrograde est toujours stable, inconditionnellement stable c'est-à-dire qu'il est stable sans conditions sur h alors que le schéma d'Euler progressif est stable si h est plus petit ou égal à 2/β Parlons maintenant de la convergence des schémas d'Euler.

Notes

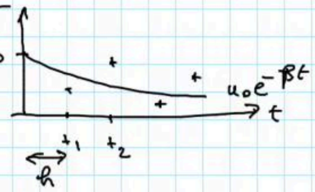
Summary

3m 35s

Chap 9- Stabilité des schémas d'Euler

$\beta>0$ $\begin{cases} \dot u(t) = -\beta u(t) & t>0 \\ u(0)=u_0 \end{cases}$ $\quad u(t)=u_0 e^{-\beta t}$

$\lim_{t\to\infty} u(t)=0$



sch. num. $u^0, u^1, u^2, \dots, u^n, u^{n+1}$

Déf: le sch. est stable si $\lim_{n\to\infty} u^n = 0$

sch. Euler progressif: $\frac{u^{n+1}-u^n}{h} = -\beta u^n \quad u^{n+1}=(1-\beta h)u^n = (1-\beta h)^{n+1}u^0 \xrightarrow{n\to\infty} 0 \iff |1-\beta h|<1 \iff -1<1-\beta h<1$

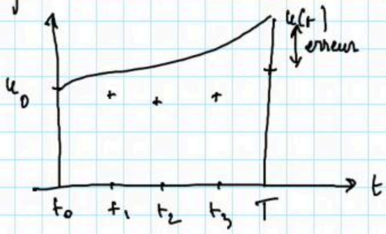
$\iff \beta h<2$

$\iff h<\frac{2}{\beta}$

sch. Euler rétrograde: $\frac{u^{n+1}-u^n}{h} = -\beta u^{n+1} \quad u^{n+1} = u^n \frac{1}{1+\beta h} = u^0 \left(\frac{1}{1+\beta h}\right)^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \iff$

$\frac{1}{1+\beta h}<1$ toujours le cas $\forall h$

Convergence des schémas d'Euler: les sch. d'Euler convergent à l'ordre 1 en h:



$t_n = nh \quad n=0,1,2.. \quad t_N = Nh = T$

$|u(t_N)-u^N| = O(h)$

Si h est divisé par 2 et N mult par 2 alors l'erreur es

On a utilisé une formule de différence finie progressive ou retrograde qui sont des formules de différence finie qui sont d'ordre 1 en h pour écrire les schémas d'Euler progressif ou rétrograde. Ces deux schémas d'Euler, convergent à l'ordre 1 en h c'est-à-dire, -donc je fais l'expérience suivante- j'ai ici t, je pars de u0 je veux calculer u(t) à un certain temps T que j'appelle le temps final t(n)=nh, n=0, 1, 2 etc ici j'ai t0, t1, t2, t3 etc et le dernier temps t(N) c'est N*h c'est égal au temps final Je prétends que u au temps T -que je ne connais pas- - u^n qui est son approximation par un schéma d'Euler progressif ou rétrograde dans le cas du schéma d'Euler progressif sous cette condition de stabilité cette quantité-là est d'ordre 1 en h car j'ai utilisé les formules de différence finie progressive ou rétrograde qui sont d'ordre 1 en h pour approcher la dérivée u° au temps t(n) ou t(n+1) Donc ceci correspond à l'expérience suivante: on fixe le temps final, on choisit un certain h et on va calculer, je vais partir de u0, u1, u2, u3 jusqu'à u4 et voilà l'erreur: u au temps t(n) - u^n Maintenant je divise h par 2, je prends un h deux fois plus petit Pour arriver au même temps final je dois multiplier le nombre de pas de temps N aussi par 2 dans ce cas-là l'erreur est approximativement divisée par 2.

Notes

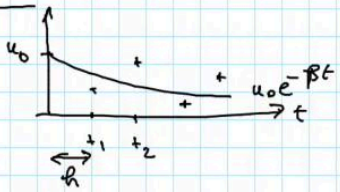
Summary

5m 35s

Chap 9 - Stabilité des schémas d'Euler

$\beta > 0$ $\begin{cases} \dot{u}(t) = -\beta u(t) & t>0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$ $u(t) = u_0 e^{-\beta t}$

$\lim_{t \to \infty} u(t) = 0$



sch. num. $u^0, u^1, u^2, \dots, u^n, u^{n+1}$

Déf: le sch. est stable si $\lim_{n \to \infty} u^n = 0$

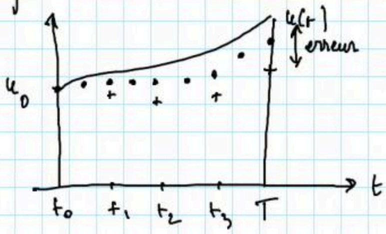
sch. Euler progressif: $\frac{u^{n+1} - u^n}{h} = -\beta u^n$ $u^{n+1} = (1-\beta h) u^n = (1-\beta h)^{n+1} u^0 \xrightarrow{n \to \infty} 0 \iff |1-\beta h| < 1 \iff -1 < 1-\beta h < 1$

$\iff \beta h < 2$

sch. Euler rétrograde: $\frac{u^{n+1} - u^n}{h} = -\beta u^{n+1}$ $u^{n+1} = u^n \frac{1}{1+\beta h} = u^0 \left(\frac{1}{1+\beta h}\right)^{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \iff$ $\iff h < \frac{2}{\beta}$

$\frac{1}{1+\beta h} < 1$ toujours le cas $\forall h$

Convergence des schémas d'Euler: les sch. d'Euler convergent à l'ordre 1 en h:



$t_n = nh$ $n = 0, 1, 2 ..$ $t_N = Nh = T$

$|u(t_N) - u^N| = O(h)$

Si h est divisé par 2 et N mult par 2 alors l'erreur est divisée par 2

Je refais une simulation avec un pas de temps deux fois plus petit. Je vais faire deux fois plus de calculs mais à la fin du compte l'erreur va être divisée par deux. Lorsque le nombre de pas de temps N tend vers l'infini et le pas de temps tend vers 0, ma solution numérique va s'approcher de plus en plus de la solution exacte.

Notes

Summary

8m 19s