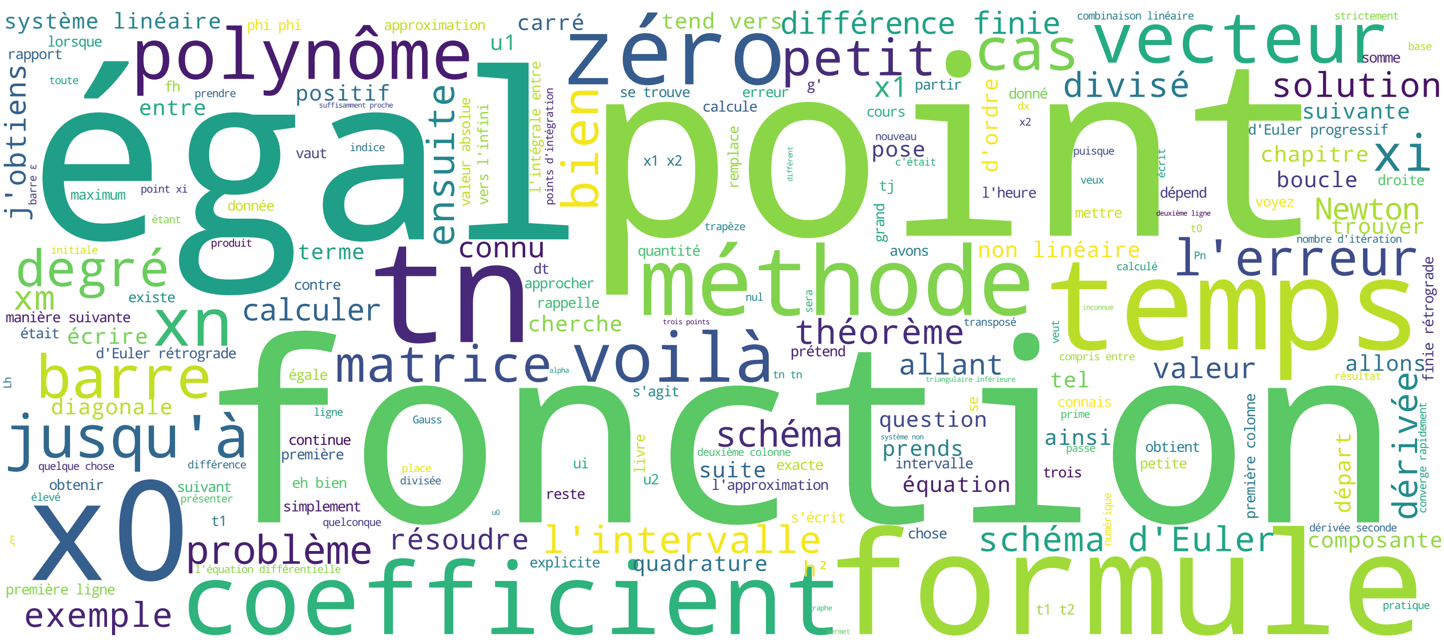
Chapitre 9 : Schéma d'Euler rétrograde

Introduction à l'analyse numérique

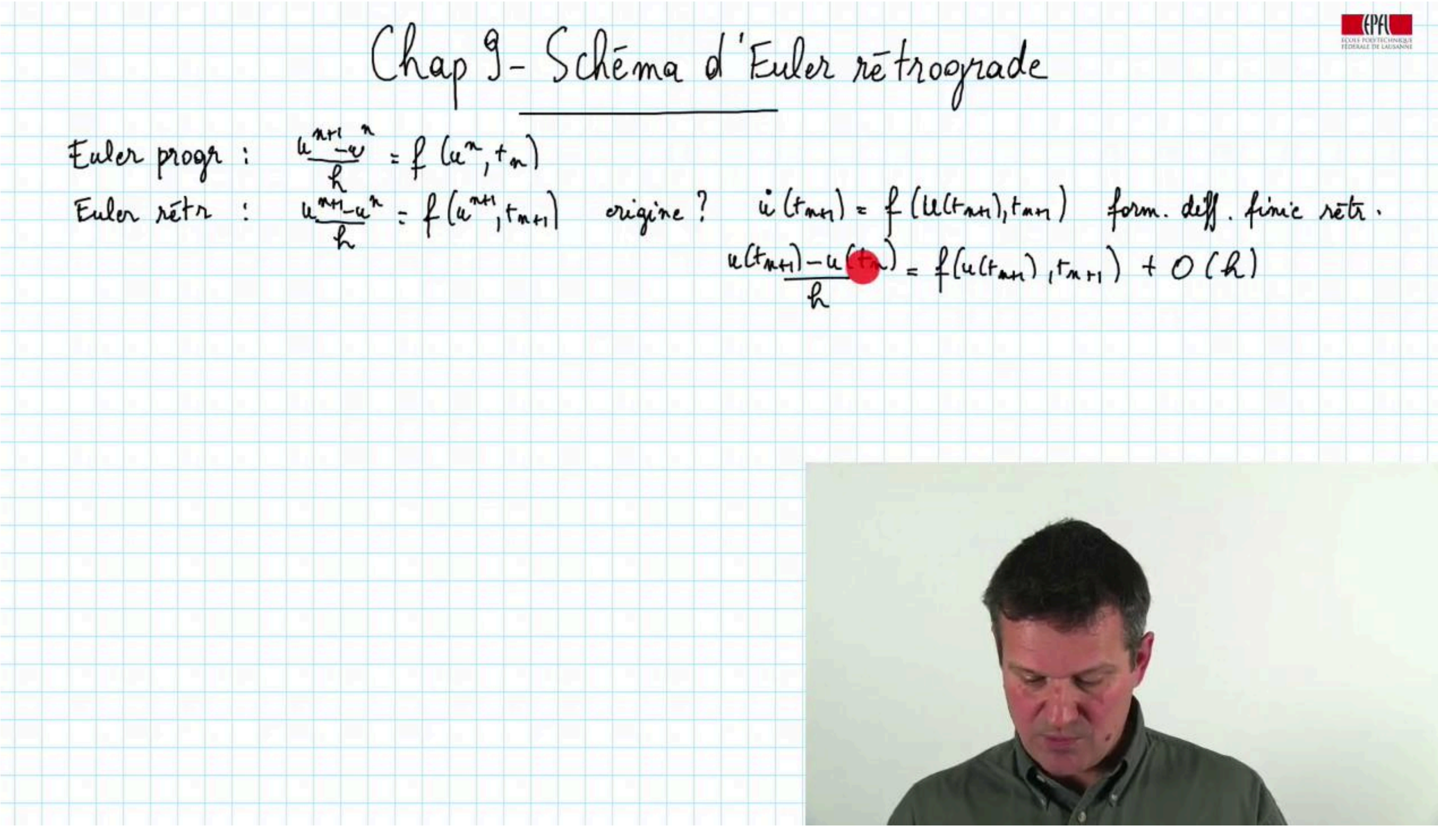
Prof. Marco Picasso



Search MOOC

Video

EPFL



Je viens de présenter le schéma d'Euler progressif. *(u^(n*+1)- *u^n)/h* = *f(u^n, tn)*. Et je vais maintenant présenter le schéma d'Euler rétrograde, qui s'écrit donc : *(u^(n+1) - un)/h*, comme le schéma d'Euler progressif et ici, à la place de *f(u^n,tn)*, on écrit *f(u^(n+1),tn+1)*. Donc, quel est l'origine, comment obtient-on ce schéma ? Et bien, on écrit l'équation différentielle au temps, cette fois-ci *tn+1*, donc *u point* au temps *tn+1*, c'est *f(u)* au temps *tn+1,tn+1* cette fois-ci, on utilise une formule de différence finie rétrograde, c'est-à-dire qu'on va approcher *u* point au temps *tn+1* par *u* en *tn+ -u* en *tn+1, -h,* c'est-à-dire *u* en *tn*, divisé par *h* et ceci doit être égal à *f(u)* en *tn+1,tn+1* plus, bien sûr, un reste d'ordre 1 en *h* parce que j'ai utilisé une formule de différence finie rétrograde. Donc ça, c'était le chapitre 2 du cours. Maintenant, pour obtenir le schéma, tout simplement, je remplace *u* au temps *tn+1*, la solution exacte au temps *tn+1*, que je ne connais pas, par *u^(n+1)*.

Notes

Summary

0m 04s

Chap 9 - Schéma d'Euler rétrograde

Euler progr : $\frac{u^{n+1}-u^n}{h} = f(u^n, t_n)$

Euler rétr : $\frac{u^{n+1}-u^n}{h} = f(u^{n+1}, t_{n+1})$ origine ? $\dot{u}(t_{n+1}) = f(u(t_{n+1}), t_{n+1})$ form. diff. finie rétr.

$$\frac{u(t_{n+1})-u(t_n)}{h} = f(u(t_{n+1}), t_{n+1}) + O(h)$$

sch Euler rétr. implicite : $\underbrace{u^{n+1}-u^n - h\, f(u^{n+1}, t_{n+1})}_{g(u^{n+1})} = 0$ u^{n+1} zéro de g

$g(x) = x - u^n - f(x, t_{n+1})$

$g'(x) = 1 - \frac{\partial f}{\partial x}(x, t_{n+1})$

Je remplace *u* au temps *tn*, que je ne connais pas, par *un*, et même chose ici, *u^(n+1),tn+1*, et je laisse tomber le terme en O*(h)* et j'obtiens ce schéma d'Euler rétrograde. Alors ce schéma d'Euler rétrograde est un schéma implicite. Alors qu'est ce que ça veut dire ? Bien, il y a une relation implicite entre *u^(n+1)* et *u^n*, donc je ne peux pas expliciter *u^(n+1)* égal quelque chose puisque *u^(n+1)* interviens ici et ici. Par contre, je peux écrire ce schéma de la manière suivante : je peux écrire que *u^(n+1)-u^n-h f(u^(n+1),tn+1)*, tout ceci doit être égal à zéro, donc si je pose ceci égal une fonction *g* en *u^(n+1)*, il s'agit de trouver le zéro de la fonction *g*, donc *u^(n+1)* est le zéro de la fonction *g*. La fonction *g*, qui est définie pour tout *x* dans R par *g(x)* = *x*, donc je remplace *u^(n+1)* par *x x-u^n*, qui est connu moins *f(x,tn+1)*. Et pour trouver le zéro de la fonction, je vais mettre en oeuvre la méthode de Newton, donc je vais avoir besoin de la dérivée, *g '* (*x*), qui est égal à 1, *un* est connu moins ici, *d(f) d(x)*, au point *x*, au temps *tn+1*.

Notes

Summary

1m 35s

Chap 9 - Schéma d'Euler rétrograde

Euler progr : $\frac{u^{n+1}-u^n}{h} = f(u^n, t_n)$

Euler rétr : $\frac{u^{n+1}-u^n}{h} = f(u^{n+1}, t_{n+1})$ origine ? $\dot{u}(t_{n+1}) = f(u(t_{n+1}), t_{n+1})$ form. diff. finie rétr.

$$\frac{u(t_{n+1})-u(t_n)}{h} = f(u(t_{n+1}), t_{n+1}) + O(h)$$

sch Euler rétr. implicite : $\underbrace{u^{n+1}-u^n - h\, f(u^{n+1}, t_{n+1})}_{g(u^{n+1})} = 0$ u^{n+1} zéro de g

$g(x) = x - u^n - f(x, t_{n+1})$

$g'(x) = 1 - \frac{\partial f}{\partial x}(x, t_{n+1})$

Newton : $x_0 = u^n$

$m = 0, 1, 2, \ldots$

$$x_{m+1} = x_m - \frac{g(x_m)}{g'(x_m)} = x_m - \frac{x_m - u^n - f(x_m, t_{n+1})}{1 - \frac{\partial f}{\partial x}(x_m, t_{n+1})}$$

Si $|x_{m+1} - x_m| < 10^{-8}$ $u^{n+1} = x_{m+1}$

Donc, la méthode de Newton s'écrit de la manière suivante : Donc, la méthode de Newton, qui me permet, à partir de *u^n*, qui est connu, de trouver *u^(n+1)*, tel que *g(u^(n+1)) = 0*. Je part d'un point de départ, comme point de départ, je choisi *u^n*, qui est la dernière grandeur que j'ai calculé. Et ensuite, je fais une boucle, *m* = 0, 1, 2, etc. c'est la boucle de Newton, et je pose donc, *x(m+1) = xm-g(xm)*, je cherche le zéro de la fonction *g*, divisé par *g ' (xm)*. Donc *g(xm)*, c'est *xm-u^n*, qui est connu moins *f(x^m)*, en temps *t(n+1)/g'(x^m)*, qui est *1-d(f) d(x)* au point *xm*, et au temps *t(n+1)*. Pour finir, je sors de la boucle de Newton lorsque *x(m+1)-xm* est petit, par exemple plus petit que 10^-8, ou autre chose. Dans ce cas-là, je pose *u^(n+1)* égal la dernière valeur que j'ai calculée, c'est-à-dire *x(n+1)*.

Notes

Summary

3m 12s

Chap 9 - Schéma d'Euler rétrograde

Euler progr : $\frac{u^{n+1}-u^n}{h} = f(u^n, t_n)$

Euler rétr : $\frac{u^{n+1}-u^n}{h} = f(u^{n+1}, t_{n+1})$ origine ? $\dot{u}(t_{n+1}) = f(u(t_{n+1}), t_{n+1})$ form. diff. finie rétr.

$$\frac{u(t_{n+1})-u(t_n)}{h} = f(u(t_{n+1}), t_{n+1}) + O(h)$$

sch Euler rétr. implicite : $\underbrace{u^{n+1}-u^n - h\, f(u^{n+1}, t_{n+1})}_{g(u^{n+1})} = 0$ u^{n+1} zéro de g

$g(x) = x - u^n - f(x, t_{n+1})$

$g'(x) = 1 - \frac{\partial f}{\partial x}(x, t_{n+1})$

Newton : $x_0 = u^n$

$m = 0, 1, 2, \dots$

$$x_{m+1} = x_m - \frac{g(x_m)}{g'(x_m)} = x_m - \frac{x_m - u^n - f(x_m, t_{n+1})}{1 - \frac{\partial f}{\partial x}(x_m, t_{n+1})}$$

Si $|x_{m+1} - x_m| < 10^{-8}$ $u^{n+1} = x_{m+1}$

inconvénient : impl, plus diff à progr.

avantage : stabilité ?

Donc, vous voyez que pour passer de *u^n* à *u^(n+1)*, je dois faire une boucle, *m* = 0, 1, 2, mais en pratique, vous savez aussi que la méthode de Newton, si elle converge, c'est-à-dire si le point de départ est suffisamment proche de la solution, et bien converge rapidement dans le cas où *g '* en *u^(n+1)* est différent de zéro, il est dérivé au dénominateur, donc converge rapidement, c'est-à-dire qu'en pratique, après quelques itérations, on obtient la solution du système non linéaire, c'est-à-dire *u^(n+1)*. Donc, inconvénients de la méthode, vous voyez bien que cette méthode est implicite, donc plus difficile à programmer. Elle sera aussi plus coûteuse, puisque je dois faire un certain nombre d'itérations, mais ce nombre d'itération n'est pas trop élevé en pratique moins de 10. Et l'avantage de cette méthode, par rapport à la méthode d'Euler progressive, qui est elle explicite, c'est que cette méthode sera stable. Donc on va maintenant parler de la stabilité des schémas d'Euler.

Notes

Summary

4m 36s