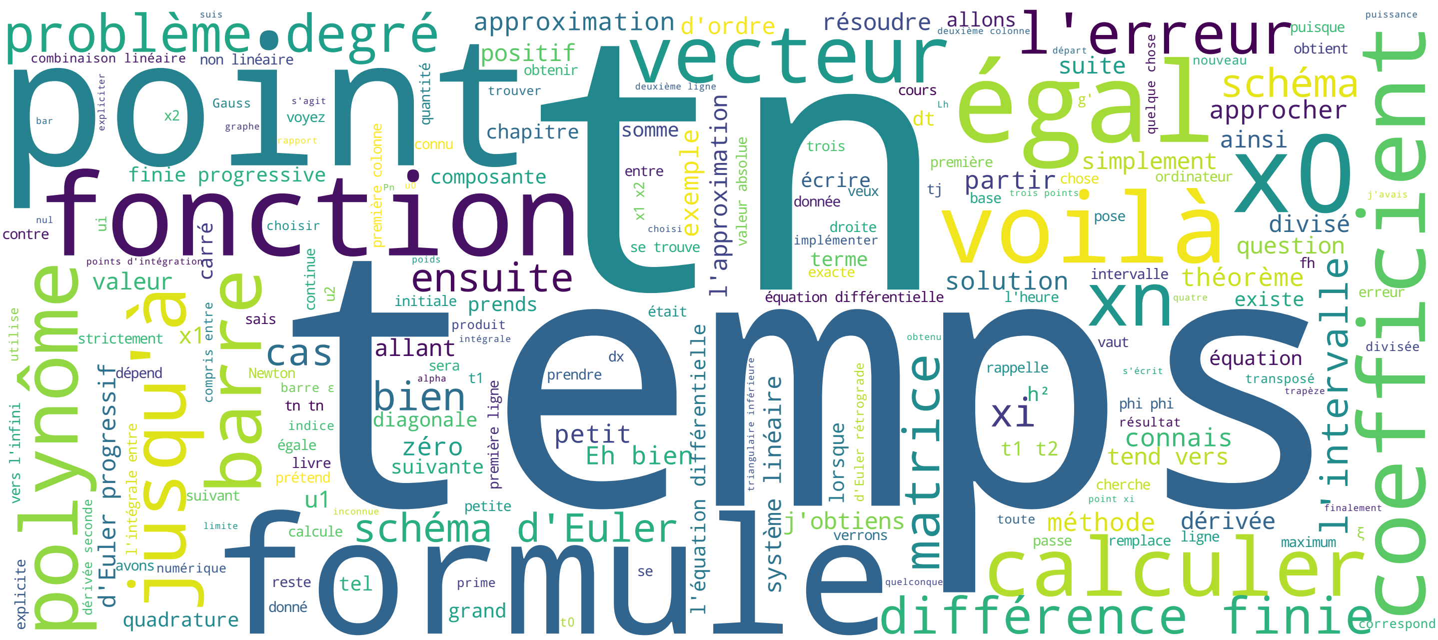
Chapitre 9 : Schéma d'Euler progressif

Introduction à l'analyse numérique

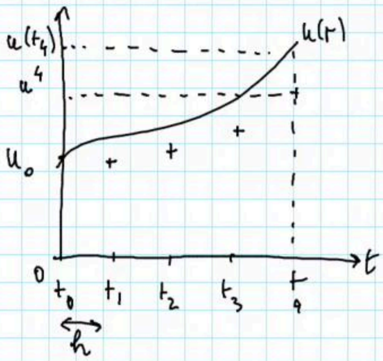
Prof. Marco Picasso



Search MOOC

Video

Chap 9- Schéma d'Euler progressif.



$t_n = nh \quad n = 0, 1, 2, \ldots$ Calculer u^n de $u(t_n)$

A partir de $u^0 = u_0$ on va calculer u^1

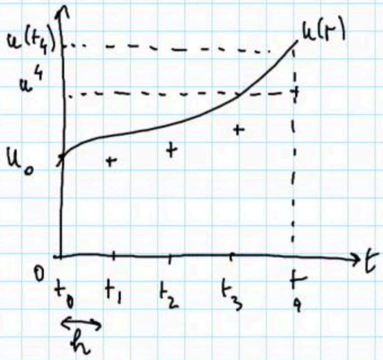
Nous présentons maintenant les schémas d'Euler pour résoudre numériquement une équation différentielle, et plus précisément, le schéma d'Euler progressif. Donc, je fais un dessin : voilà *t* et voilà la solution de l'équation différentielle, donc *u(t)*, pour un certain temps *t* voilà *u(t)*, je pars de *u*0 au temps 0. Alors, l'idée, c'est de choisir des temps discrets, *t1*, *t0* ici, *t1*, *t2*, *t3*, jusqu'à *tn*, ici vous avez *t*4. Tous ces points étant distant de *h*, qui est le pas de temps. Donc, on pose *tn* = *nh*, *n* = 0, 1, 2, etc. et le but, c'est de calculer des approximations du *u*^*n*, de *u* au temps *tn*. Donc, voilà, vous avez ici u au temps *t*4. Et nous allons maintenant calculer les approximations et partant de *u*0, voilà l'approximation *u*1, de *u* au temps *t*1, *u*2 de *u* au temps *t*2, *u*3 de *u* au temps *t*3 et *u*4, qui est l'approximation de *u* au temps *t*4. Alors, donc à partir de *u*0, qui est choisi comme la condition initiale *u*0, et bien, on va calculer une approximation *u*1.

Notes

Summary

0m 03s

Chap 9 - Schéma d'Euler progressif.



$t_n = nh \quad n = 0, 1, 2, \dots$ Calculer u^n de $u(t_n)$

A partir de $u^0 = u_0$ on va calculer u^1

u^1 -- -- u^2

$\vdots$

u^n -- -- u^{n+1}

méthode de marche en temps.

Schéma d'Euler progressif: $\dfrac{u^{n+1} - u^n}{h} = f(u^n, t_n)$

origine ? on écrit l'éq. diff. temps t_n : $\dot{u}(t_n) = f(u(t_n), t_n)$

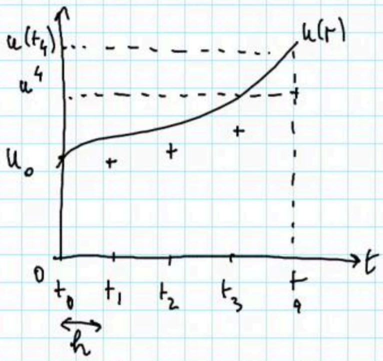
Ensuite, à partir de *u*1, on va calculer *u*2, qui est l'approximation de *u* au temps *t*2, et ainsi de suite. et donc, à partir de *u^n*, on va calculer *u^n* + 1, qui est l'approximation de *u* au temps *tn* +1. Donc la question, c'est comment, à partir de *u^n*, calculer *u^n* + 1? Donc, ceci, c'est ce qu'on appelle une méthode de marche en temps, ce qui est la manière intuitive de comprendre le problème. Donc, comment passer de *u^n* à *u^n* +1, eh bien, c'est le schéma, par exemple, schéma d'Euler progressif. Encore une fois, je connais *u^n*, je veux calculer *u^n* +1. Donc, l'équation différentielle, c'est *u* point *(t)* = *f(ut, t)*. Donc, le *u* point, voilà le terme qui correspond au *u* point, *u^n* + 1 - *u^n/h*, le pas de temps, donc, tous les points sont distant de *h*, égal ici *f(u^n, tn)*. Donc, quel est l'origine de ce schéma d'Euler, comment obtient-on ce schéma d'Euler ? Eh bien, on écrit l'équation différentielle au temps *tn*, Donc, j'ai u point en *tn* = *f(u)* au temps *tn, tn*. Voilà, donc cette équation différentielle est vraie pour tout t positif, je l'écris au temps *tn*.

Notes

Summary

1m 43s

Chap 9- Schéma d'Euler progressif.



$t_n = nh \quad n = 0, 1, 2, \dots$ Calculer u^n de $u(t_n)$

A partir de $u^0 = u_0$ on va calculer u^1

u^1 - - - - u^2

$\vdots$

u^n - - - - u^{n+1}

méthode de marche en temps.

Schéma d'Euler progressif: $\dfrac{u^{n+1} - u^n}{h} = f(u^n, t_n)$

origine ? on écrit l'éq. diff. temps t_n : $\dot{u}(t_n) = f(u(t_n), t_n)$ on utilise une formule de dif. finies progressive pour approcher $\dot{u}(t_n)$ chap 2

$$\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{h} = f(u(t_n), t_n) + O(h)$$

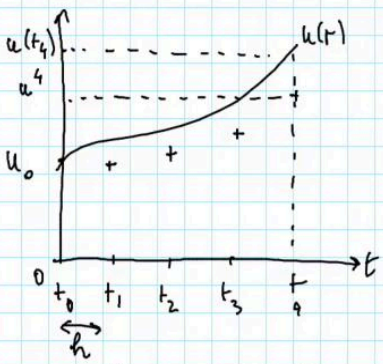
Ensuite, on utilise une formule de différence finie, justement progressive pour approcher *u* point au temps *tn*. Donc, on utilise une formule de différence finie progressive pour approcher *u* point au temps *tn*. Donc, ceci, on l'a fait au chapitre 2, on a présenté des formules de différence finie pour approcher des dérivées d'ordre 1 ou d'ordre 2, et on a parlé de formules de différence finie progressive. Donc, on va approcher *u* point au temps *tn*, ou *u*' au temps *tn*, par *u* en *tn* +1, c'est *u* en *tn* +*h*, mais *tn* + *h*, c'est *tn*+1 moins *u* en *tn*, divisé par *h*. Voilà une formule de différence finie progressive pour approcher *u* ' au temps *tn*. Donc, ceci doit être égal à *f(u)* au temps *tn*, *tn*, mais ici, j'avais une équation différentielle *u* point au temps *tn* = *f(u) tn*, *tn*. J'ai remplacé *u* point au temps *tn* par une formule de différence finie progressive, alors bien sûr, il me reste un terme d'ordre 1 en *h* ici.

Notes

Summary

3m 20s

Chap 9 – Schéma d'Euler progressif.



$t_n = nh \quad n = 0, 1, 2, \ldots$ Calculer u^n de $u(t_n)$

A partir de $u^0 = u_0$ on va calculer u^1

u^1 -- -- u^2

$\vdots$

u^n ---- u^{n+1}

méthode de marche en temps.

Schéma d'Euler progressif: $\dfrac{u^{n+1}-u^n}{h} = f(u^n, t_n)$

origine ? on écrit l'éq. diff. temps t_n : $\dot{u}(t_n) = f(u(t_n), t_n)$ on utilise une formule de diff. finies progressive pour approcher $\dot{u}(t_n)$ chap 2

$\dfrac{u(t_{n+1})-u(t_n)}{h} = f(u(t_n), t_n) + O(h)$ on remplace $u(t_n)$ par u^n

avan

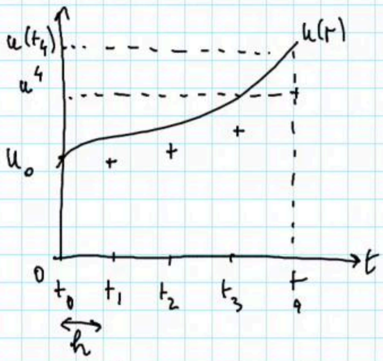
Alors, si on regarde maintenant la différence entre le schéma d'Euler et celui-ci, eh bien, j'ai obtenu le schéma d'Euler en remplaçant, on remplace maintenant, il faut écrire un schéma, c'est-à-dire quelque chose que je peux implémenter sur un ordinateur, Alors, je ne peux pas implémenter cette formule sur un ordinateur, bien tout simplement parce que je ne connais pas le temps *tn* +1, je ne connais pas *u* au temps *tn*, je ne sais pas ce que veux dire ce *o(h)* sur un ordinateur. par contre, je peux très bien implémenter cette formule-là, parce que si je connais *u^n*, je peux calculer *u^n* + 1 avec cette formule-là. Donc, ce que je vais faire, simplement à partir de cette ligne, c'est remplacer *u(tn)* par *u^n* et *u(tn)* +1 par *u^n* +1, et j'obtiens bien cette égalité-là. Donc, on remplace *u(tn)* par son approximation *u^n*, on remplace *u(tn)* +1 par son approximation *u^n* +1 et on laisse tomber ce grand *0(h)* dont on ne sait que faire sur un ordinateur. Et on obtient ce schéma ici d'Euler progressif. Alors, quels sont les avantages de ce schéma d'Euler progressif ?

Notes

Summary

4m 39s

Chap 9 – Schéma d'Euler progressif.



$t_n = nh$ $n = 0, 1, 2, \dots$ Calculer u^n de $u(t_n)$

A partir de $u^0 = u_0$ on va calculer u^1
u^1 - - - - u^2
$\vdots$
u^n - - - - u^{n+1}

méthode de marche en temps.

Schéma d'Euler progressif : $\dfrac{u^{n+1} - u^n}{h} = f(u^n, t_n)$

origine ? on écrit l'éq. diff. temps t_n : $\dot{u}(t_n) = f(u(t_n), t_n)$ on utilise une formule de diff. finies progressive pour approcher $\dot{u}(t_n)$ chap 2

$\dfrac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{h} = f(u(t_n), t_n) + O(h)$ on remplace $u(t_n)$ par u^n

avantage : schéma explicite : $u^{n+1} = u^n + h f(u^n, t_n)$

« Avantages » Eh bien, il s'agit d'un schéma qui est dit explicite. Donc, un schéma explicite, c'est-à-dire qu'il existe une formule explicite, on peut expliciter *u^n* +1 à partir de *u^n*. Tout simplement, on a *u^n* +1 égal, donc je mets le *h* ici, et je passe tout ce qui est connu à droite, donc j'obtiens *u^n* +1 = *u^n*+ *hf(u^n, tn)*. Donc, je suis au temps *tn*, je connais la fonction *f(x, t)*. Je l'évalue au temps *tn* pour un *x* = *u^n*, *u^n*, je le connais. Ceci, je connais donc je peux calculer *u^n* +1. Donc, ce schéma est explicite, donc facile à programmer. « facile à programmer » Nous verrons des exemples matelables lors des exercices. Et puis, inconvénents, nous verrons que ce schéma a un inconvénient plus tard. Eh bien, ceci est lié à la notion de stabilité, que nous verrons plus tard dans le cours. Mais maintenant, je vais présenter le schéma d'Euler rétrograde.

Notes

Summary

5m 50s