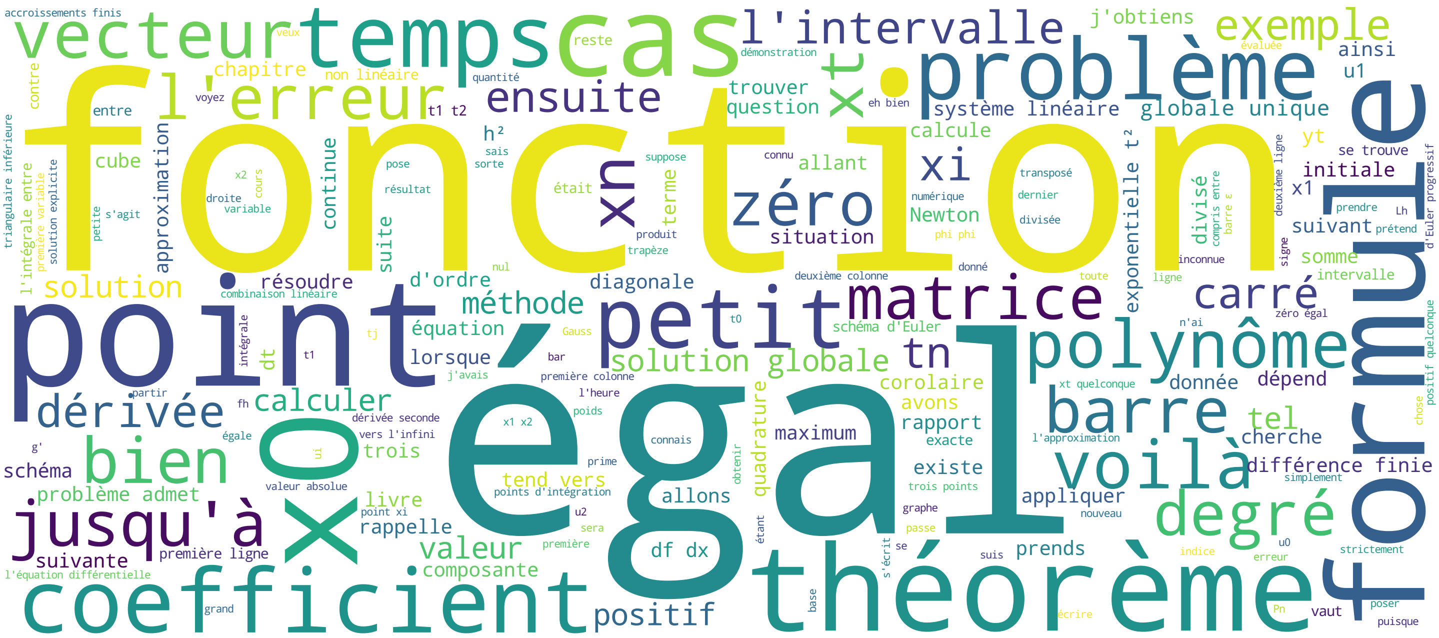
Chapitre 9 : Théorème 9.1 (existence)

Introduction à l'analyse numérique

Prof. Marco Picasso



Search MOOC

Video

Chap 9 - Théorème 9.1 (existence)

Thm 9.1 : données : $u_0 \in \mathbb{R}$ $f(x,t)$

pbm : trouver $u(t)$ tq $\dot{u}(t) = f(u(t),t)$ $t \geq 0$ $u(0) = u_0$

hyp : $f(x,t)$ continue et $\exists \, \ell : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \to \ell(t) \end{array}$ tq $\forall x,y \in \mathbb{R}$ $\forall t \geq 0$ $(f(x,t) - f(y,t))(x-y) \leq \ell(t)\,(x-y)^2$.

Nous avons vu qu'il y a des situations où l'équation différentielle a une solution unique pour tout temps t Il y a des situations où il y a plusieurs solutions et des situations où, après un certain temps, il n'y a plus de solution. Donc, j'ai à ma disposition un théorème de l'analyse qui me permet d'affirmer que sous certaines hypothèses il y a une solution et une seule. Donc je vous donne ce théorème sans démonstration : c'est le théorème 9.1 du livre. Je vous rappelle que les données du problème c'est la condition initiale U 0 et la fonction f qui dépend des variables x et t x dans R, t positif. Le problème à résoudre est de trouver la fonction U qui dépend de t telle que U point de t prime de t égal f de U de t et de t pour t positif avec comme condition initiale U au temps de zéro égal à U zéro. Les hypothèses sur la fonction f sont les suivantes : f est continue et de plus je dois pouvoir exhiber une autre fonction que j'appelle l qui à t retourne l de t t joue le rôle du temps, est dans R + l de t est dans R, tel que si je prends un couple xy quelconque dans R je prends un temps t positif quelconque je calcule f de xt moins f de yt que je multiplie par x moins y et bien ceci doit être plus petit ou égal à cette fonction l de t fois x moins y au carré.

Notes

Summary

0m 04s

Chap 9 - Théorème 9.1 (existence)

Thm 9.1 : données : $u_0 \in \mathbb{R}$ $f(x,t)$

pbm : trouver $u(t)$ tq $\dot{u}(t) = f(u(t),t)$ $t > 0$ $u(0) = u_0$

hyp : $f(x,t)$ continue et $\exists\, l : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $t \to l(t)$ tq $\forall x,y \in \mathbb{R}$ $\forall t \geq 0$ $(f(x,t) - f(y,t))(x-y) \leq l(t)\,(x-y)^2$.

Concl : le pbm admet une solution globale unique.

Corollaire : $f(x,t)$ C^1 $\exists K \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall t \geq 0$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \leq K$. Alors le pbm admet une solution globale unique.

Dem : Soit $x,y \in \mathbb{R}$, soit $t \geq 0$, on a $(f(x,t) - f(y,t))(x-y)$.

Donc, je répète, je dois exhiber, à partir de cette fonction f, un l (fonction l) qui, pour tout xy t satisfait f de xt moins yt fois x moins y plus petit ou égal à l de t fois x moins au carré. Dans ce cas-là, la conclusion est la suivante : le problème à résoudre est de trouver U tel que point égal f 0 égal à zéro et bien ce problème admet une solution globale, c'est-à-dire pour tout temps t et unique et une seule. Corolaire de ce théorème : on suppose que f de xt est cette fois-ci une fois continument dérivable et on suppose qu'il existe un K dans R tel que, pour tout x temps R, pour tout t positif, la dérivée de f par rapport à la première variable des f de x évaluée en xt plus petit ou égal à ce cas. J'affirme que dans ce cas-là, alors le problème à résoudre, l'équation différentielle admet une solution globale unique. Démonstration de ce corolaire : je prends xy deux réels quelconques, je prens un t positif quelconque. Je dois calculer f de xt moins f de yt fois x moins y Je souhaite démontrer que ceci est plus petit ou égal à un certain l de t que je dois trouver fois y moins y au carré.

Notes

Summary

1m 54s

Chap 9- Théorème 9.1 (existence)

Thm 9.1 : données : $u_0 \in \mathbb{R}$ $\quad f(x,t)$

pbm : trouver $u(t)$ tq $\dot{u}(t) = f(u(t),t)$ $\quad t>0 \quad u(0)=u_0$

hyp : $f(x,t)$ continue et $\exists\, \ell : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ t \to \ell(t)$ tq $\forall x,y \in \mathbb{R}\ \forall t \geq 0\ \big(f(x,t)-f(y,t)\big)(x-y) \leq \ell(t)\,(x-y)^2$.

Concl : le pbm admet une solution globale unique.

Corollaire : $f(x,t)$ C^1 $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall t \geq 0\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \leq K$. Alors le pbm admet une solution globale unique.

Dem : Soit $x,y \in \mathbb{R}$, soit $t \geq 0$, on a $\big(f(x,t)-f(y,t)\big)(x-y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,t)(x-y)^2 \leq \underbrace{K}_{\ell(t)}(x-y)^2$

on applique le thm 9.1 $\ell(t)=K$

Ex 9.1 : $\begin{cases} \dot{u}(t) = 3u(t)-3t \\ u(0)=\alpha \end{cases}$ $\quad f(x,t)=3x-3t \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=3=K$. le pbm admet 1 sol. glob.

Donc le théorème des accroissements finis m'assure que f de xt moins f de yt je peux l'écrire comme df de x alors c'est bien la première variable qui change : xy donc df dx en un point intermédiaire que je note xi ξ (ξ se trouve quelque part entre x et y) on a x y et ξ, donc f de xt moins f de yt fois x moins y c'est df dξ fois x moins y ça c'est le théorème des accroissements finis et j'avais encore un x moins y ici donc pour finir, j'arrive à un x moins y au carré. Je sais maintenant que l'hypothèse est que df dx est plus petit ou égal à K Donc tout ceci plus petit ou égal à K fois x moins y carré et j'ai bien trouvé la fonction l en question puisqu'il suffit de poser l de t égal K Dans ce cas-là on peut appliquer le théorème avec l de t égal à K et le problème admet une solution globale unique. Exemple : reprenons les exemples de la page précédente. Il y avait l'exemple 9.1 qui était le suivant, je vous rappelle : U point de t égal 3 U de t moins 3 t U de zéro égal alpha α La fonction f de xt dans ce cas-là est définie par f de xt égal 3 x moins 3 t Je calcule df dx pour un xt quelconque, j'obtiens 3 Donc, voilà le cas en question et je peux appliquer le corolaire du théorème : le problème admet une solution globale unique.

Notes

Summary

3m 50s

Chap 9 - Théorème 9.1 (existence)

Thm 9.1 : données : $u_0 \in \mathbb{R}$ $f(x,t)$

pbm : trouver $u(t)$ tq $\dot{u}(t) = f(u(t),t)$ $t>0$ $u(0)=u_0$

hyp : $f(x,t)$ continue et $\exists\, \ell : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $t \to \ell(t)$ tq $\forall x,y \in \mathbb{R}$ $\forall t \geqslant 0$ $(f(x,t)-f(y,t))(x-y) \leqslant \ell(t)\,(x-y)^2$.

Concl : le pbm admet une solution globale unique.

Corollaire : $f(x,t)$ C^1 $\exists K \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall t \geqslant 0$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \leqslant K$. Alors le pbm admet une solution globale unique.

Dem : Soit $x,y \in \mathbb{R}$, soit $t \geqslant 0$, on a $(f(x,t)-f(y,t))(x-y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,t)(x-y)^2 \leqslant \underbrace{K}_{\ell(t)}(x-y)^2$

on applique le thm 9.1 $\ell(t)=K$

Ex 9.1 : $\begin{cases} \dot{u}(t) = 3u(t) - 3t \\ u(0) = \alpha \end{cases}$ $f(x,t) = 3x-3t$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = 3 = K$. le pbm admet 1 sol. glob. unique

$\begin{cases} \dot{u}(t) = -(u(t))^3 \\ u(0) = 1 \end{cases}$ $f(x,t) = -x^3$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -3x^2 \leqslant 0 = K$.

D'ailleurs, je l'ai trouvée, faisant intervenir une exponentielle 3t et une solution particulière. Par contre, maintenant, ce qui est intéressant est que je peux remplacer 3t par, par exemple, exponentielle t² de sorte que je ne puisse plus trouver la solution explicite de l'équation. f de xt serait 3x (par exemple) plus exponentielle t² df dx serait toujours égal à 3 donc je peux toujours appliquer le théorème et le problème admet une solution globale unique que je ne peux pas expliciter. Mais je sais qu'il y a une solution globale unique. Autre exemple aussi, c'était celui (le dernier) U point de t égal U de t en cube, avec un signe moins avec une condition initiale U de zéro égal 1 Vous remarquez que, dans ce théorème ou dans le corolaire, la valeur de la condition initiale n'a pas d'importance. Alors U point de t égal moins U de t au cube donc la fonction f de xt dans ce cas-là c'est moins x au cube la dérivée de cette fonction pour un xt quelconque c'est moins 3 x² qui est négatif et donc je peux appliquer le corolaire du théorème avec K égal zéro, le problème admet une solution globale unique.

Notes

Summary

5m 45s

Chap 9 - Théorème 9.1 (existence)

Thm 9.1 : données : $u_0 \in \mathbb{R}$ $f(x,t)$

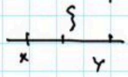
pbm : trouver $u(t)$ tq $\dot{u}(t) = f(u(t),t)$ $t \geq 0$ $u(0) = u_0$

hyp : $f(x,t)$ continue et $\exists\, \ell : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $t \to \ell(t)$ tq $\forall x,y \in \mathbb{R}$ $\forall t \geq 0$ $(f(x,t)-f(y,t))(x-y) \leq \ell(t)\,(x-y)^2$.

Concl : le pbm admet une solution globale unique.

Corollaire : $f(x,t)$ C^1 $\exists K \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall t \geq 0$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \leq K$. Alors le pbm admet une solution globale unique.

Dem : Soit $x,y \in \mathbb{R}$, soit $t \geq 0$, on a $(f(x,t)-f(y,t))(x-y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,t)(x-y)^2 \leq \underbrace{K}_{\ell(t)}(x-y)^2$



on applique le thm 9.1 $\ell(t) = K$

Ex 9.1 : $\begin{cases} \dot{u}(t) = 3u(t) - 3t \\ u(0) = \alpha \end{cases}$ $f(x,t) = 3x - 3t$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = 3 = K$. le pbm admet 1 sol. glob. unique

$\begin{cases} \dot{u}(t) = -(u(t))^3 \\ u(0) = 1 \end{cases}$ $f(x,t) = -x^3$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -3x^2 \leq 0 = K$.

Et je peux, de nouveau, faire la même remarque : je pourrais rajouter ici exponentielle t² Dans ce cas-là je n'ai plus la solution explicite mais je calcule f de xt, ce serait moins x cube plus exponentielle t² la dérivée par rapport à x reste la même et donc le problème admet encore une solution globale unique même si je ne suis pas capable de l'expliciter. Maintenant nous allons résoudre numériquement ces équations différentielles.

Notes

Summary

7m 02s