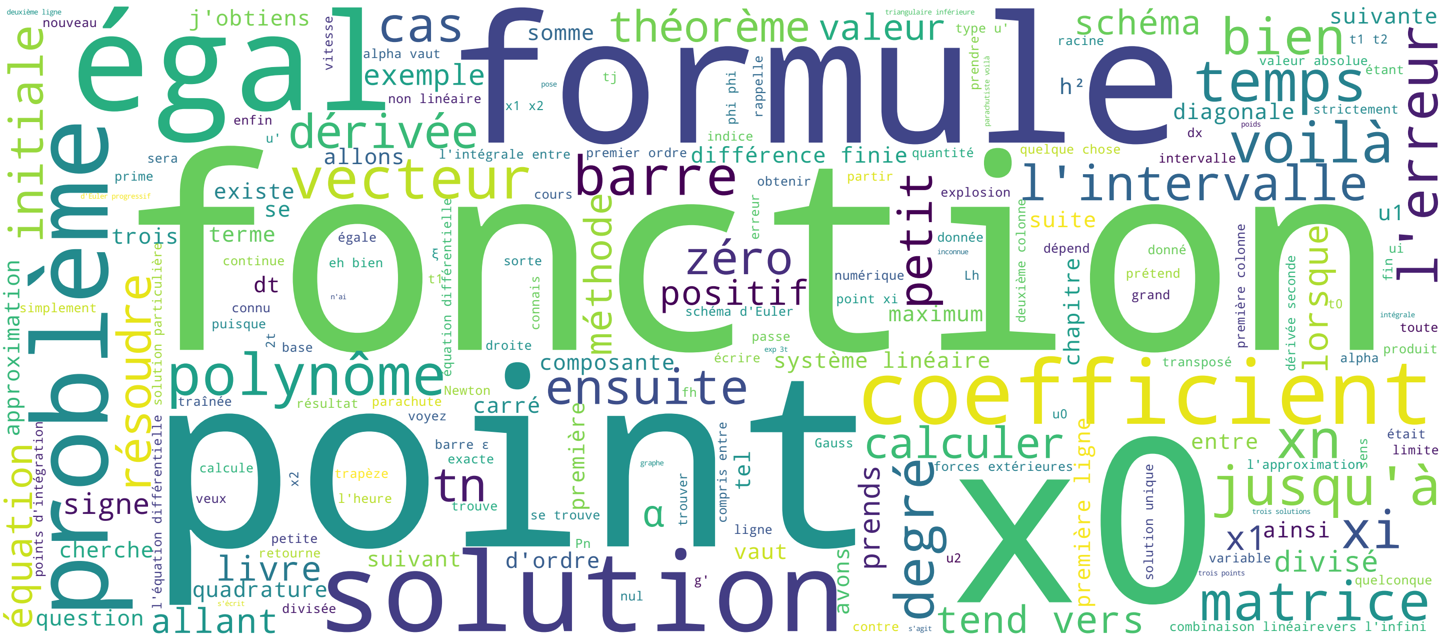
Chapitre 9 : Equations différentielles du 1er ordre – Position du problème

Introduction à l'analyse numérique
Prof. Marco Picasso



Search MOOC

Video

EPFL

Chap 9 - Equations différentielles du 1er ordre - Position du problème

Pbm : donné : $u_0 \in \mathbb{R}$ $\quad f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ (x,t) \to f(x,t) \end{array}$ cont

cherché : $u : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \to u(t) \end{array}$ tq $\begin{cases} \dot{u}(t) = f(u(t),t) & t>0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$ $\quad \dot{u}(t) = u'(t) = \frac{d}{dt} u(t)$

Pbm Cauchy, à valeur initial

Equations différentielles du premier ordre. Posons le problème, le problème à résoudre est le suivant : ce qui est donné c'est une condition initiale u0 qui est dans R, ensuite on se donne aussi une fonction f de deux variables (x,t) donc qui à (x,t) retourne f(x,t) x est dans R, t joue le rôle du temps, positif, et f(x,t) est dans R, donc une fonction continue. Et puis ce qui est cherché, donc on cherche une fonction u d'une variable, t retourne u(t), donc t positif, u(t) dans R, qui satisfait l'équation différentielle du premier ordre suivante : u point de t, alors ici u point de t c'est la notation des livres de physique pour dire u'(t), c'est-à-dire on a une fonction d'une varible, il faut calculer la dérivée d/dt*u(t), aucune ambiguïté là-dessus. Cette fonction u satisfait : u'(t) =f(u (t) t) pour t positif avec comme condition initiale u(0)=u0 qui est connu. Ce problème s'appelle problème de Cauchy dans la littérature mathématique, ou problème à valeur initiale comme traduction de l'anglais : initial value problem. Quelle est la motivation de cette équation différentielle ?

Notes

Summary

0m 02s

Chap 9 - Equations différentielles du 1er ordre - Position du problème

Phm : donné : $u_0 \in \mathbb{R}$ $\quad f : \begin{array}{l} \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ (x,t) \to f(x,t) \end{array}$ cont

cherché : $u : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \to u(t) \end{array}$ tq $\begin{cases} \dot{u}(t) = f(u(t),t) & t>0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$ $\qquad \dot{u}(t) = u'(t) = \frac{d}{dt}u(t)$

Phm Cauchy, à valeur initial

Motivation :  $\downarrow$ $\begin{cases} m\,\dot{V}(t) = F(V(t),t) \\ V(0) \end{cases}$ gravité traînée

Ex 9.1 : $\begin{cases} \dot{u}(t) = 3u(t) - 3t \\ u(0) = \alpha \end{cases}$ $\qquad f(x,t) = 3x - 3t \qquad u(t) = \left(\alpha - \frac{1}{3}\right)e^{3t} + t + \frac{1}{3}$

Considérons le cas d'un parachutiste, voilà le parachutiste, voilà le parachute, ce parachutiste tombe à une vitesse v et les équations de Newton s'écrivent : masse fois accélération, qui est la dérivée de la vitesse, égale forces extérieures donc gravité et force de traînée du parachute, donc les forces extérieures dépendent de la vitesse et éventuellement du temps. Donc ici les forces extérieures : gravité qui pousse vers le bas, et la traînée qui freine la chute du parachute. Avec une condition initiale qui est que v(0) est connue. Donnons quelques exemples, exemple 9.1 du livre, le problème à résoudre est le suivant : u'(t)=3u(t)-3t avec comme condition initiale : u(0)= α, un réel donné. Donc ici la fonction f(x,t) c'est 3x-3t, j'ai remplacé u par x, la solution de ce problème, vous savez résoudre ce problème il s'agit d'une équation linéaire avec une fonction donc si vous connaissez la solution du problème homogène, c'est quelque chose fois exp(3t), donc u'=3u, une solution particulière c'est la fonction t + 1/3 donc la fonction u c'est quelque chose fois exp(3t) plus la solution particulière et la constante est déterminée de sorte que la condition initiale soit satisfaite et on trouve ici alpha - 1/3.

Notes

Summary

1m 39s

Chap 9 - Equations différentielles du 1er ordre - Position du problème

Phm : donné : $u_0 \in \mathbb{R}$ $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $(x,t) \to f(x,t)$ cont

cherché : $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $t \to u(t)$ tq $\begin{cases} \dot u(t) = f(u(t),t) & t>0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$ $\dot u(t) = u'(t) = \frac{d}{dt} u(t)$

Phm Cauchy, à valeur initial

Motivation :  $\downarrow$ $\begin{cases} m\,\dot V(t) = F(V(t),t) \\ V(0) \end{cases}$ gravité traînée

Ex 9.1 : $\begin{cases} \dot u(t) = 3u(t) - 3t \\ u(0) = \alpha \end{cases}$ $f(x,t) = 3x - 3t$ $u(t) = \left(\alpha - \frac{1}{3}\right) e^{3t} + t + \frac{1}{3}$ une sol. unique

Ex 9.2 : $\begin{cases} \dot u(t) = (u(t))^{1/3} \\ u(0) = 0 \end{cases}$ $\dot u u^{\alpha} = 1$ $\alpha = -1/3$ $\frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1}(t) = t + C$ $u(t) = \pm\left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}$ $u(t) = 0$

3 solutions

Ex 9.3 : $\dot u(t) = (u(t))^3$, $u(0) = 1$

Donc ici il y a une solution unique au problème. Prenons un autre exemple, exemple 9.2 du livre, cette fois-ci je résous : u'(t)=u(t)^1/3 avec comme condition initiale : u(0)=0. Je peux résoudre cette équation différentielle, elle est du type u'*u^(α)=1, donc ce terme-là, je le passe de l'autre côté, ici donc alpha vaut -1/3. La primitive de u'.u^(α)=1 c'est 1/(1+α)*u(t)^(α+1) et à droite, si je prends la primitive, j'obtiens t plus une constante. J'obtiens, pour finir, avec la valeur de alpha qui m'est donnée, j'obtiens que la solution du problème u(t) c'est (2/3*t)^(3/2) vous avez cette solution, avec un signe plus donc, la même solution avec un signe moins et enfin, vous avez aussi une autre solution qui est u(t)=0 parce que si vous regardez dans ces deux équations, 0 est bien solution de ces deux équations. Ici j'ai trois solutions qui sont : la première (2/3*t)^(3/2), moins cette solution, et enfin la solution qui vaut 0 tout le temps, donc trois solutions à ce problème. Finalement, dernier exemple du livre, exemple 9.3, qui est u'(t)=u(t)^3 avec comme condition initiale, cette fois-ci, u(0)=1.

Notes

Summary

3m 37s

Chap 9 - Equations différentielles du 1er ordre - Position du problème

Phm : donné : $u_0 \in \mathbb{R}$ $\quad f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $(x,t) \to f(x,t)$ cont

cherché : $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $t \to u(t)$ tq $\begin{cases} \dot u(t) = f(u(t),t) & t>0 \\ u(0)=u_0\end{cases}$ $\quad \dot u(t) = u'(t) = \frac{d}{dt}u(t)$

Phm Cauchy, à valeur initial

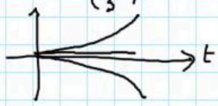
Motivation :

$\begin{cases} m\,\dot V(t) = F(V(t),t) \\ V(0)\end{cases}$ gravité traînée

Ex 9.1 : $\begin{cases}\dot u(t) = 3u(t) - 3t \\ u(0)=\alpha\end{cases}$ $\quad f(x,t) = 3x-3t$ $\quad u(t) = \left(\alpha - \frac{1}{3}\right)e^{3t} + t + \frac{1}{3}$ une sol. unique

Ex 9.2 : $\begin{cases}\dot u(t) = (u(t))^{1/3}\\ u(0)=0\end{cases}$ $\quad \dot u u^\alpha = 1$ $\quad \alpha=-1/3$ $\quad \frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}(t) = t+c$ $\quad u(t) = \pm\left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}$ $\quad u(t)=0$

3 solutions



Ex 9.3 : $\begin{cases}\dot u(t) = (u(t))^3 \\ u(0)=1\end{cases}$ $\quad \dot u u^\alpha = 1$ $\quad \alpha=-3$

Toujours une équation du type : u'.u^(α)=1 cette fois-ci alpha vaut -3 et je trouve, la primitive reste 1/(1+α)*u(t)^(α+1)=t + c et j'obtiens comme solution u(t)=1/racine de (1-2t) Au temps 0 je pars de 1 et lorsque t s'approche de 1/2, il y a explosion au sens où la limite quand t tend vers 1/2 par valeur négative de u(t) égale plus l'infini. J'ai explosion, on dit qu'il y a explosion de la solution. Par contre, chose notable, je change simplement le signe de l'équation différentielle : u(t) = -u(t)^3 toujours la condition initiale u(0)=1, j'ai toujours une équation du type u'.u^(α) = -1 alpha vaut toujours -3, et je trouve finalement que la solution est donnée par 1/racine de (1+2t) donc le signe moins qui était ici me donne un signe plus à la place d'un signe moins avant, et donc je n'ai plus aucun problème, j'ai une solution et une seule pour tout temps t, cette solution part de 1 et lorsque t tend vers l'infini elle tend vers 0. Ici il y a une solution unique. Maintenant je vais énoncer un théorème, théorème de la fin du livre, qui nous permettra de statuer dans un certain nombre de cas.

Notes

Summary

5m 39s