Chapitre 8 : Méthode de Newton (suite)

Introduction à l'analyse numérique

Prof. Marco Picasso

Search MOOC

Video

EPFL

Chap 8 - Méthode de Newton (suite)

Thm 8.4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$, soit $\bar{x}$ tq $f(\bar{x}) = 0$, supp $f'(\bar{x}) \neq 0$. Alors $\exists\, \varepsilon > 0$ $\forall$ $\bar{x} - \varepsilon \leq x_0 \leq \bar{x} + \varepsilon$ la suite déf. par $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge vers $\bar{x}$. De plus la convergence est quadratique : $\exists\, C > 0$ $\forall n$

$$|\bar{x} - x_{n+1}| \leq C\, |\bar{x} - x_n|^2.$$

J'énonce maintenant le théorème 8.4 du livre, qui nous permet de mieux appréhender la méthode de Newton. Donc, soit *f* de *R* dans *R* de classe *C²*, 2 fois continûment dérivable, soit *x barre* à *f(0)*, *x barre* tel que *f(x barre) = 0*, donc je suppose que zéro existe. Et je suppose encore que *f'(x barre)* est différent de zéro, c'est une quantité qui intervient au dénominateur. Alors, dans ce cas-là, j'affirme qu'il existe un *ε* positif, tel que pour tout *x0*, le point de départ de la méthode de Newton, compris entre *x barre - ε* et *x barre + ε*, autrement dit si *x0* est suffisamment proche de *x barre*, et bien dans ce cas-là, la suite, définie par *xn+1* égal *xn - f(xn)/f'(xn)* et bien cette suite converge vers *x barre*, donc ceci, c'est l'application du théorème 8.3, le théorème de point fixe. Il y a une information supplémentaire, de plus la convergence est quadratique, c'est-à-dire très rapide. Au sens suivant, il existe *c* tel que pour tout *n*, l'erreur à l'étape *n+1*, *x* barre - *xn+1* est plus petite ou égale à *c* fois l'erreur à l'étape *n*, *(x* barre - *xn)²*, voilà la fin du théorème.

Notes

Summary

0m 03s

Chap 8 - Méthode de Newton (suite)

Thm 8.4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$, soit $\bar{x}$ tq $f(\bar{x}) = 0$, supp $f'(\bar{x}) \neq 0$. Alors $\exists\, \varepsilon > 0$ $\forall$ $\bar{x} - \varepsilon \leq x_0 \leq \bar{x} + \varepsilon$ la suite déf. par $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge vers $\bar{x}$. De plus la convergence est quadratique : $\exists\, C > 0$ $\forall n$

$$|\bar{x} - x_{n+1}| \leq C\, |\bar{x} - x_n|^2.$$

Interprét : Si x_0 suff proche de $\bar{x}$, converg. rapide $C = 1$

$|\bar{x} - x_0| = 0{,}1$
$|\bar{x} - x_1| \leq 10^{-2}$
$|\bar{x} - x_2| \leq 10^{-4}$
$|\bar{x} - x_3| \leq 10^{-8}$

Donc, avant de faire la démonstration, démonstration de la deuxième partie du théorème, c'est à dire la partie quadratique, « Interprétation » de ce théorème. Prenons par exemple, si *x0* est suffisamment proche de *x barre*, donc ça c'est la condition : il existe un *ε* tel que pour tout *x0* minoré par *x* barre - *ε* et majoré par *x* barre + *ε*, donc si *x0* est suffisamment proche de *ε*, la convergence est rapide. Prenons par exemple la situation, pour fixer les idées, où *c = 1*, et *x barre - x0*, donc l'erreur, je choisis un *x0*, et il s'avère que l'erreur initiale est de 0,1. Je calcule ensuite *x barre - x1*, c'est plus petit que une fois *x barre - x0²*, c'est-à-dire 10^-2, l'erreur à l'étape 2, *x barre - x2*, c'est plus petit que une fois *c* fois l'erreur à-- *x barre - x1²*, c'est à dire 10^-4, et l'erreur à la troisième itération, *x barre - x3*, c'est plus petit que 10^-8. Donc, en trois itérations, j'ai approché la solution du problème à 10^-8 près. La convergence est très rapide.

Notes

Summary

2m 05s

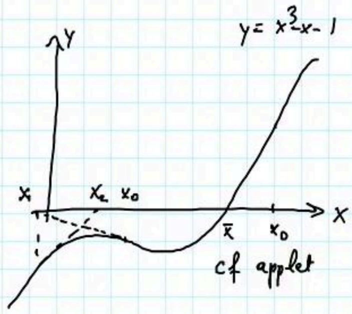
Chap 8 - Méthode de Newton (suite)

Thm 8.4. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ C^2, soit $\bar{x}$ tq $f(\bar{x})=0$, supp $f'(\bar{x})\neq 0$. Alors $\exists\, \varepsilon>0$ $\forall$ $\bar{x}-\varepsilon \le x_0 \le \bar{x}+\varepsilon$ la suite déf. par $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge vers $\bar{x}$. De plus la convergence est quadratique : $\exists\, C>0$ $\forall n$

$$|\bar{x}-x_{n+1}| \le C\,|\bar{x}-x_n|^2.$$

Interprét : Si x_0 suff proche de $\bar{x}$, converg. rapide $C=1$

$|\bar{x}-x_0|=0{,}1$
$|\bar{x}-x_1|\le 10^{-2}$
$|\bar{x}-x_2|\le 10^{-4}$
$|\bar{x}-x_3|\le 10^{-8}$



Il existe des situations où la méth. de Newton ne conv. pas

Dem : $x_{n+1} = g(x_n)$ $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

Maintenant, il existe des situations où la méthode de Newton ne converge pas, par exemple, je fais le dessin suivant, je considère la fonction qui est donnée par *x3 - x - 1*, donc vous avez une applet à disposition pour faire, pour illustrer ces calculs. Vous partez d'un *x0*, qui est ici, et vous arrivez très rapidement, il suffit de prendre la tangente, ici, vous arrivez très rapidement à *x barre* qui est le zéro de cette fonction. Par contre, si vous partez d'un *x0* qui est ici, et bien, en appliquant la méthode de Newton, vous prenez ici la tangente, le *x1* sera ici, ensuite le *x2* sera ici, donc vous allez soit osciller entre 2 valeurs, soit carrément diverger, donc cette condition « sur *x0* suffisamment proche de *x barre* », qui est ici, et bien cette condition subsiste. Passons maintenant à la démonstration de ce résultat, donc « Démonstration ». Donc, j'ai tout à l'heure calculé, j'ai dit que *xn+1 = g(xn)*, la méthode de Newton est une méthode de point fixe. Donc *g(x) = x - f(x)/f'(x)*. J'ai calculé-- tout d'abord, notons que si *g'(x barre)* est différent de zéro, donc elle reste différent de zéro dans un voisinage de la solution, donc je peux déjà calculer *xn+1 = g(xn)*.

Notes

Summary

3m 43s

Chap 8 - Méthode de Newton (suite)

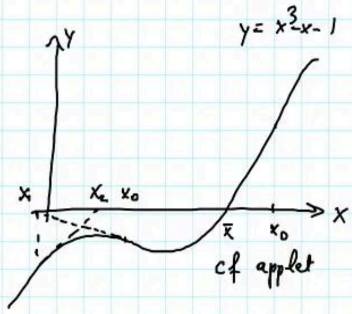
Thm 8.4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$, soit $\bar{x}$ tq $f(\bar{x}) = 0$, supp $f'(\bar{x}) \neq 0$. Alors $\exists\, \varepsilon > 0$ $\forall$ $\bar{x} - \varepsilon \leq x_0 \leq \bar{x} + \varepsilon$ la suite déf. par $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge vers $\bar{x}$. De plus la convergence est quadratique : $\exists\, C > 0$ $\forall n$

$$|\bar{x} - x_{n+1}| \leq C\, |\bar{x} - x_n|^2 .$$

Interprét : Si x_0 suff proche de $\bar{x}$, converg. rapide $C = 1$

$$|\bar{x} - x_0| = 0{,}1$$
$$|\bar{x} - x_1| \leq 10^{-2}$$
$$|\bar{x} - x_2| \leq 10^{-4}$$
$$|\bar{x} - x_3| \leq 10^{-8}$$

Il existe des situations où la méth. de Newton ne conv. pas

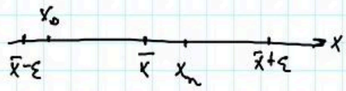


cf applet

Dem : $x_{n+1} = g(x_n)$ $\quad g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ $\quad g'(x) = 1 - \dfrac{(f'(x))^2 - ff''(x)}{(f'(x))^2}$ $\quad |g'(\bar{x})| = 0 < 1$

thm 8.3 $\exists\, \varepsilon > 0$ $\forall$ $\bar{x} - \varepsilon \leq x_0 \leq \bar{x} + \varepsilon$ $\quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ conv.

$$f(\bar{x}) = f(x_n) + (\bar{x} - x_n) f'(x_n) + \frac{(\bar{x} - x_n)^2}{2} f''(\xi)$$



Donc, la dérivée, j'ai déjà calculé, *g'(x)* c'était *1 - ((f'(x))² - ff''(x))* divisé par *(f'(x))²*, et j'ai observé que *g'(x barre)* était égal à zéro, qui est strictement plus petit que 1, donc d'après le théorème 8.3, il existe un *ε* positif tel que si mon point de départ *x0* se trouve entre *x barre - ε* et *x barre + ε*, et bien la suite définie par *xn+1 = g(xn)*, c'est-à-dire *xn - f(xn)/f'(xn)*, cette suite converge. Donc reste à démontrer la convergence quadratique, c'est cette deuxième partie du résultat, alors qu'est-ce-que je fais ? Je calcule, je fais un développement de Taylor, je calcule *f(x barre) = f(xn)* plus la différence entre *x barre* et *xn*, *(x barre - xn) f'(xn) + (x barre - xn)²* divisé par 2 factoriel, c'est-à-dire 2, fois *f''* en un point intermédiaire *ξ*. Donc voilà *x*, donc, j'ai ici *x barre*, c'est le zéro, j'ai *xn*, qui se trouve ici, donc voilà l'intervalle [*x barre - ε, x barre + ε*], dans lequel j'ai placé le point de départ *x0*, et je sais que l'erreur diminue à chaque itération.

Notes

Summary

5m 40s

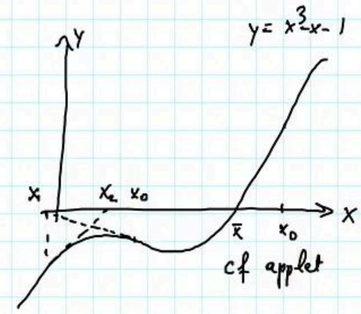
Chap 8 - Méthode de Newton (suite)

Thm 8.4. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$, soit $\bar{x}$ tq $f(\bar{x})=0$, supp $f'(\bar{x})\neq 0$. Alors $\exists\, \varepsilon>0$ $\forall\ \bar{x}-\varepsilon\le x_0\le\bar{x}+\varepsilon$ la suite déf. par $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge vers $\bar{x}$. De plus la convergence est quadratique : $\exists\, C>0$ $\forall n$

$$|\bar{x}-x_{n+1}|\le C\,|\bar{x}-x_n|^2.$$

Interprét : Si x_0 suff proche de $\bar{x}$, converg. rapide $C=1$

$|\bar{x}-x_0|=0{,}1$
$|\bar{x}-x_1|\le 10^{-2}$
$|\bar{x}-x_2|\le 10^{-4}$
$|\bar{x}-x_3|\le 10^{-8}$



cf applet

Il existe des situations où la méth. de Newton ne conv. pas

Dem : $x_{n+1}=g(x_n)$ $\quad g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$ $\quad g'(x)=1-\frac{(f'(x))^2-ff''(x)}{(f'(x))^2}$ $\quad |g'(\bar{x})|=0<1$

thm 8.3 $\exists\,\varepsilon>0$ $\forall\ \bar{x}-\varepsilon\le x_0\le\bar{x}+\varepsilon$ $\quad x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ conv.

$$f(\bar{x})=f(x_n)+(\bar{x}-x_n)f'(x_n)+\frac{(\bar{x}-x_n)^2}{2}f''(\xi)$$

$$|\bar{x}-x_{n+1}|=\frac{|\bar{x}-x_n|^2}{2}\,\frac{|f''(\xi)|}{|f'(x_n)|}$$

Le *ξ* se trouve quelque part entre *x barre* et *xn*, mais je sais qu'il se trouve aussi entre *x barre* - *ε* et *x barre* + *ε*. Donc maintenant, je peux calculer *(x barre - xn+1)²*. *x barre - xn x barre - xn+1* en valeur absolue, pardon. Donc c'est égal à *(x barre - xn)²* divisé par 2, donc j'ai divisé cette relation, cette ligne par *f'(xn)*, et il me reste ici *f''(ξ)* valeur absolue, divisé par *f'(xn)* valeur absolue. Alors, maintenant je n'ai pas encore gagné, parce que je dois démontrer qu'il existe *c* tel que pour tout *n*, *c* ne dépend pas de *n*, or pour l'instant, *c*, le candidat, c'est *1/2 f''(ξ)* fois *f'(xn)*, *ξ*, lui, est compris entre *x barre* et *xn*, donc à priori cette quantité-là, ce *c* dépend de *xn*.

Notes

Summary

7m 39s

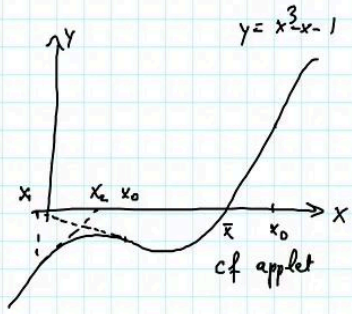
Chap 8 - Méthode de Newton (suite)

Thm 8.4. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$, soit $\bar{x}$ tq $f(\bar{x})=0$, supp $f'(\bar{x})\neq 0$. Alors $\exists\, \varepsilon>0$ $\forall$ $\bar{x}-\varepsilon \leq x_0 \leq \bar{x}+\varepsilon$ la suite déf. par $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge vers $\bar{x}$. De plus la convergence est quadratique : $\exists\, C>0$ $\forall n$

$$|\bar{x}-x_{n+1}| \leq C\,|\bar{x}-x_n|^2.$$

Interprét : Si x_0 suff proche de $\bar{x}$, converg. rapide $C=1$

$|\bar{x}-x_0|=0{,}1$
$|\bar{x}-x_1|\leq 10^{-2}$
$|\bar{x}-x_2|\leq 10^{-4}$
$|\bar{x}-x_3|\leq 10^{-8}$



Il existe des situations où la méth. de Newton ne conv. pas

Dem : $x_{n+1}=g(x_n)$ $g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ $g'(x)=1-\dfrac{(f'(x))^2-ff''(x)}{(f'(x))^2}$ $|g'(\bar{x})|=0<1$

thm 8.3 $\exists\,\varepsilon>0$ $\forall$ $\bar{x}-\varepsilon\leq x_0\leq\bar{x}+\varepsilon$ $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ conv.

$$f(\bar{x})=f(x_n)+(\bar{x}-x_n)f'(x_n)+\frac{(\bar{x}-x_n)^2}{2}f''(\xi)$$

$$|\bar{x}-x_{n+1}|=\frac{|\bar{x}-x_n|^2}{2}\,\frac{|f''(\xi)|}{|f'(x_n)|}\leq|\bar{x}-x_n|^2\,\frac{1}{2}\,\frac{\max\limits_{\bar{x}-\varepsilon\leq x\leq\bar{x}+\varepsilon}|f''(x)|}{\min\limits_{\bar{x}-\varepsilon\leq x\leq\bar{x}+\varepsilon}|f'(x)|}$$

Par contre, ce que je peux faire, je ne peux pas choisir ce *c* là, mais je peux majorer ceci par *(x barre - xn)² 1/2* je peux majorer le numérateur par la plus grande des valeurs sur l'intervalle [*x barre* - *ε*, *x barre* + *ε*], et le dénominateur par la plus petite des valeurs sur l'intervalle [*x barre* - *ε*, *x barre* + *ε*], donc je mets ici maximum, ici des *f''(x)* en valeur absolue, *x* compris entre, ici, *x barre* - *ε* et *x barre* + *ε*, divisé par la plus petite des valeurs, *min* des *f'(x)* en valeur absolue, *x* compris entre *x barre* - *ε* et *x barre* + *ε*, et voilà le *c* en question, de mon théorème, donc c'est un demi du maximum des dérivées secondes divisé par le minimum des dérivées secondes sur l'intervalle [*x barre* - *ε*, *x barre* + *ε]*. Et j'ai démontré mon théorème.

Notes

Summary

8m 48s