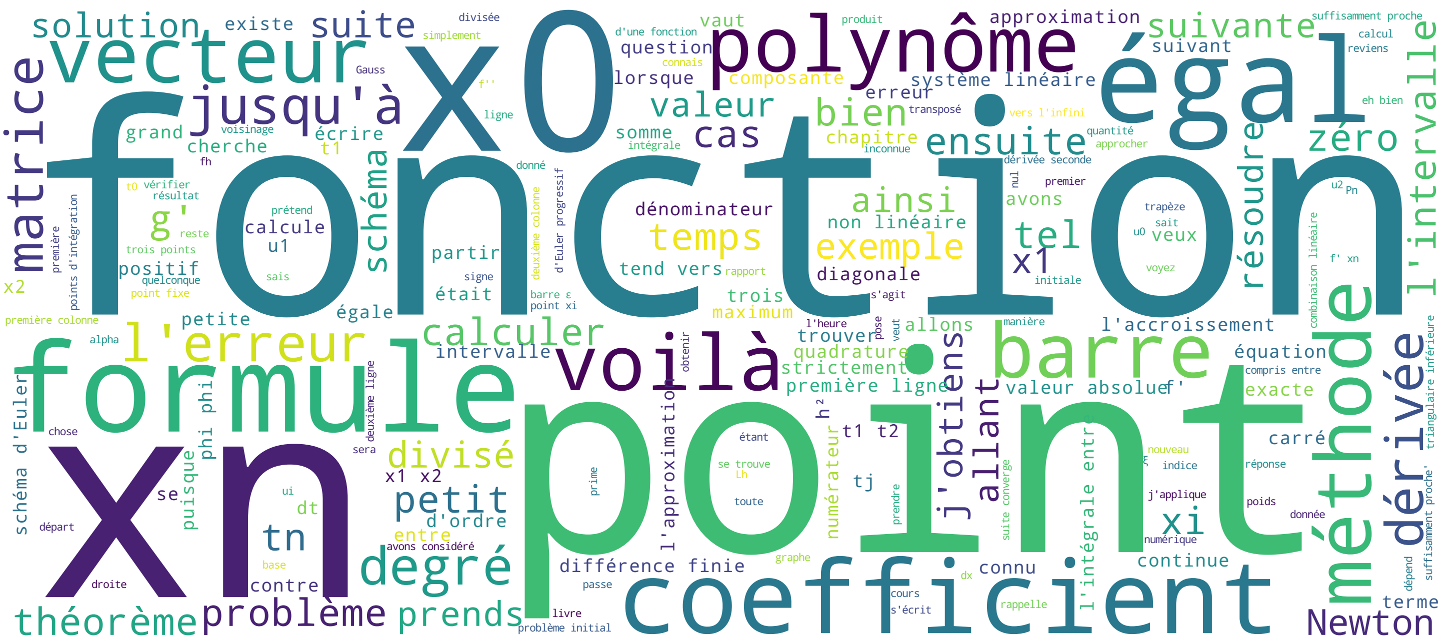
Chapitre 8 : Méthode de Newton

Introduction à l'analyse numérique

Prof. Marco Picasso



Search MOOC

Video

EPFL

Chap 8 - Méthode de Newton

$\bar{x}$ tq $\bar{x} = g(\bar{x})$ x_0 $x_{n+1} = g(x_n)$ si $|g'(\bar{x})| < 1$ et si x_0 suffisamment proche de $\bar{x}$ alors la suite converge

Question : comment s'affranchir de la cond. $|g'(\bar{x})| < 1$? Méthode de Newton

Jusqu'à maintenant, nous avons considéré un point fixe d'une fonction g soit $\bar{x}$tel que $\bar{x} = g(\bar{x})$ Nous avons considéré la méthode qui, à partir d'un point$x0$, permettait de calculer $x1$, puis$x2$, puis $x(n+1)$ à partir de xn en posant simplement $x(n+1)=g(xn)$ et nous avons vu que si $g'(\bar{x})$ en valeur absolue est strictement plus petit que 1 et si $x0$ est dans un voisinage de$\bar{x}$ donc suffisamment proche de $\bar{x}$ -nous avons vu la définition mathématique précise de ce 'suffisamment proche'- alors la suite converge. Ici, il y a deux problèmes : Le premier c'est qu'on ne sait pas en général, si $g'(\bar{x}) < 1$ et ensuite on ne sait pas ce que veut dire 'suffisamment proche'. Alors 'suffisamment proche', on ne pourra pas l'améliorer dans la suite du cours, par contre, $g'(\bar{x}) < 1$, on va pouvoir s'affranchir de cette condition. Question : Comment s'affranchir de la condition $g'(\bar{x}) < 1$? La réponse est : la méthode de Newton.

Notes

Summary

0m 03s

Chap 8 - Méthode de Newton

$\bar{x}$ tq $\bar{x} = g(\bar{x})$ x_0 $x_{n+1} = g(x_n)$ si $|g'(\bar{x})| < 1$ et si x_0 suffisamment proche de $\bar{x}$ alors la suite converge

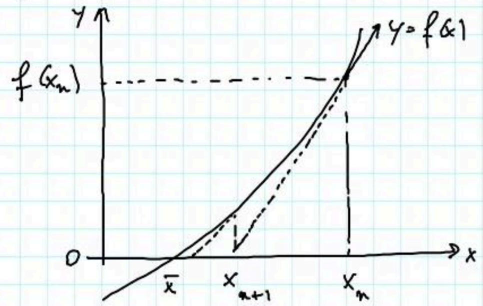
Question : comment s'affranchir de la cond. $|g'(\bar{x})| < 1$? Méthode de Newton

$\bar{x}$ tq $f(\bar{x}) = 0$

x_n connu, x_{n+1} ?

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}}$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$



La méthode de Newton est la suivante : je reviens à mon problème initial qui était de trouver $\bar{x}$ tel que $f(\bar{x}) = 0$ je reviens maintenant au problème initial qui était de trouver le 0 d'une fonction f Je reprends maintenant x, y le graphe de la fonction f $y = f(x)$ Je cherche $\bar{x}$ tel que $f(\bar{x}) = 0$ J'ai un xn à disposition : j'ai calculé l'approximation xn de $\bar{x}$ et je veux maintenant calculer -xn connu- et on veut déterminer $x(n+1)$ La procédure est la suivante : je prends la dérivée au pointxn et je cherche l'intersection de la direction de la dérivée avec l'axe des x, donc je vais appeler ce point là $x(n+1)$ et ensuite je vais pouvoir calculer $x(n+2)$ et ainsi de suite. Que vaut $x(n+1)$? Ici, vous avez$x(n)$, ici vous avez $f(xn)$ et donc la dérivée$f'(xn)$ c'est l'accroissement en y divisé par l'accroissement en x. Donc l'accroissement en y, c'est $f(xn)$-0 c'est cette distance-là. et l'accroissement en x, attention au signe c'est divisé par xn-$x(n+1)$ donc $x(n+1) = (xn-f(xn)) / f'(xn)$ et voilà comment je calcule $x(n+1)$ à partir dexn.

Notes

Summary

1m 23s

Chap 8 - Méthode de Newton

$\bar{x}$ tq $\bar{x} = g(\bar{x})$ x_0 $x_{n+1} = g(x_n)$ si $|g'(\bar{x})| < 1$ et si x_0 suffisamment proche de $\bar{x}$ alors la suite converge

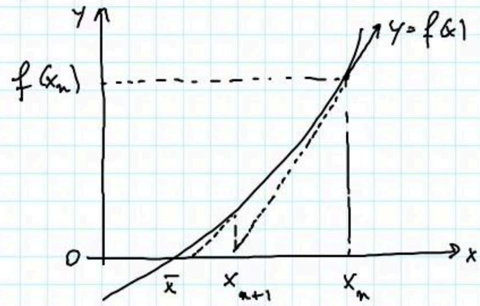
Question : comment s'affranchir de la cond. $|g'(\bar{x})| < 1$? Méthode de Newton

$\bar{x}$ tq $f(\bar{x}) = 0$

x_n connu , x_{n+1} ?

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}}$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$



la méth de Newton est une méth de pt fixe

$x_{n+1} = g(x_n)$ où $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ $\quad g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x) f''(x)}{(f'(x))^2}$

$g'(\bar{x}) = 1 -$

Alors une 1ère remarque : la méthode de Newton est une méthode de points fixes. pour trouver le zéro de la fonction*f*. Je peux écrire *x(n+1) = g(xn) x(n+1) = g(xn)* où la fonction *g* est définie pour tout *x* dans R par *g(x) = (x-f(x))/f'(x)* Si la fonction*f*est C2, et si elle ne s'annule pas-- si le dénominateur n'est pas nul, je peux calculer la dérivée seconde et j'obtiens que *g'(x)*, puisque pour vérifier si cette méthode converge je dois absolument calculer la dérivée en $\bar{x}$, et regarder si elle est plus petite que 1 en valeur absolue. Donc je calcule *g'(x)* pour un *x* quelconque et j'obtiens 1 moins, au dénominateur *(f'(x))²* au numérateur- je dérive le numérateur *f'(x)* fois le dénominateur *(f'(x))²* moins le numérateur *f(x)* fois la dérivée du dénominateur *f''(x)* Maintenant ce qui compte, c'est *g'(x̄)* où $\bar{x}$ est tel que *f(x̄) = 0* Donc si j'applique la formule, je trouve-- dans ce calcul-là, si j'évalue cette formule en $\bar{x}$, et bien ce terme disparait puisque *f(x̄)* est nulle.

Notes

Summary

3m 22s

Chap 8 - Méthode de Newton

$\bar{x}$ tq $\bar{x}=g(\bar{x})$ x_0 $x_{n+1}=g(x_n)$ si $|g'(\bar{x})|<1$ et si x_0 suffisamment proche de $\bar{x}$ alors la suite converge

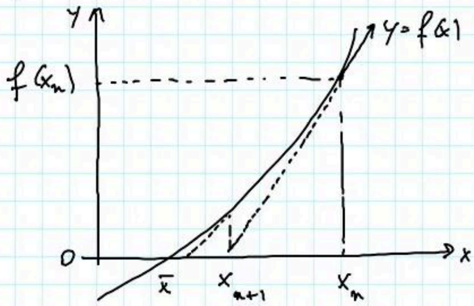
Question : comment s'affranchi de la cond. $|g'(\bar{x})|<1$? Méthode de Newton

$\bar{x}$ tq $f(\bar{x})=0$

x_n connu, x_{n+1} ?

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n)-0}{x_n-x_{n+1}}$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$



la méth de Newton est une méth de pt fixe

$x_{n+1}=g(x_n)$ où $g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$ $\quad g'(x)=1-\frac{(f'(x))^2-f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$

$g'(\bar{x})=1-\frac{(f'(\bar{x}))^2}{(f'(\bar{x}))^2}=0<1$ D'après le thm 8.3 : si x_0 suff. proche $\bar{x}$ alors la suite déf. par $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge !

Il va me rester *1-(f'(x̄))² / (f'(x̄))²* c'est à dire 1-1 = 0 0 est plus petit que 1, donc d'après le théorème 8.3, je sais que si le point de départ *x0* est suffisamment proche du 0 de la fonction *f*, que je recherche, de*x̄*, alors la suite définie par *x(n+1)* = --c'est la méthode de Newton qui est ici-- *(xn-f(xn)) / f'xn*, cette suite converge vers*x̄* De manière plus précise, je vais énoncer le théorème 8.4 du livre.

Notes

Summary

5m 18s