Chapitre 8 : Méthode de point fixe (exemple)

Introduction à l'analyse numérique

Prof. Marco Picasso

Search MOOC

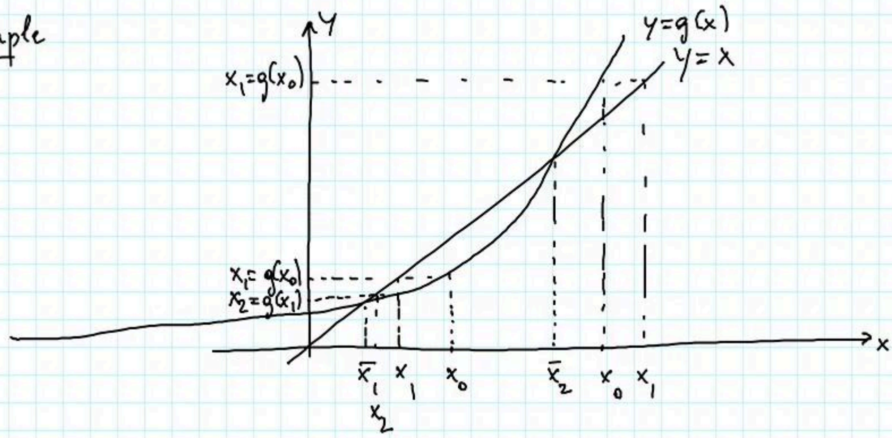
Video

EPFL

Chap 8 - Méthode de point fixe

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cont $\quad \bar{x} = g(\bar{x}) \quad x_0$ donné $n = 0, 1, 2, \ldots \quad x_{n+1} = g(x_n)$ Question $(x_n)_n$ converge ?

Exemple



$\bar{x}_i = g(\bar{x}_i) \quad i = 1, 2$

Si $x_0 < \bar{x}_2$ on obs.

$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}_1$

Si $x_0 > \bar{x}_2$ on obs.

$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$

Explication : Thm 8.3 : $g \in \mathcal{C}^1 \quad |g'(\bar{x}_1)| < 1$

Donc, l'exemple que j'avais considéré était le suivant : Il y avait une fonction ici et le graphe d'une fonction *g* qui avaient deux points fixes *x*1 bar et *x*2 bar et on avait observé que si *x*0 était à gauche de *x*2 bar et bien la suite, *xl* +1 = *g*(*xn*), convergeait vers *x*1 bar et si *x*0 était plus grand, la suite définie par *xl* + 1 = *g(xn)* divergeait. Alors maintenant, je peux appliquer le théorème 8.3 à la fonction *g* donc j'ai une fonction *g*, je suppose qu'elle est C1. J'observe que *g*' en *x1* bar est strictement plus petit que 1. Donc, voyez ici la dérivée est strictement plus petite que 1 et ici la dérivée de la première bissectrice est 1 la dérivée est strictement plus petite.

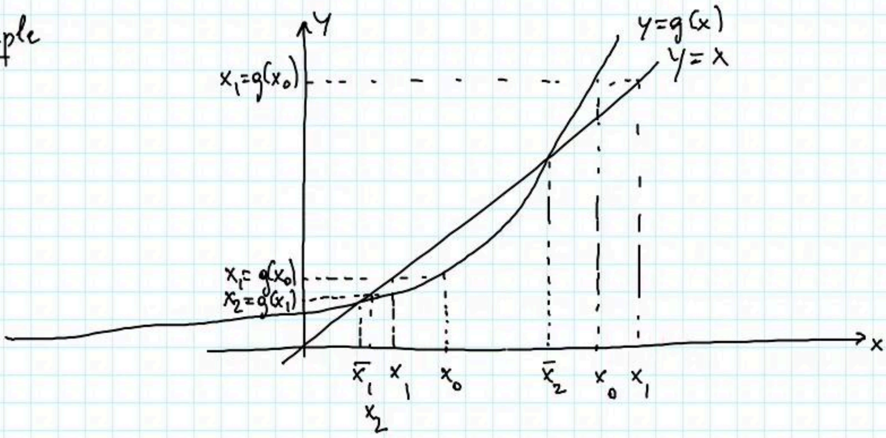
Notes

Summary

Chap 8 - Méthode de point fixe

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cont $\quad \bar{x}=g(\bar{x}) \quad x_0$ donné $n=0,1,2,\dots \quad x_{n+1}=g(x_n)$ Question $(x_n)_n$ converge ?

Exemple



$\bar{x}_i = g(\bar{x}_i) \quad i=1,2$

Si $x_0 < \bar{x}_2$ on obs.

$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}_1$

Si $x_0 > \bar{x}_2$ on obs.

$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$

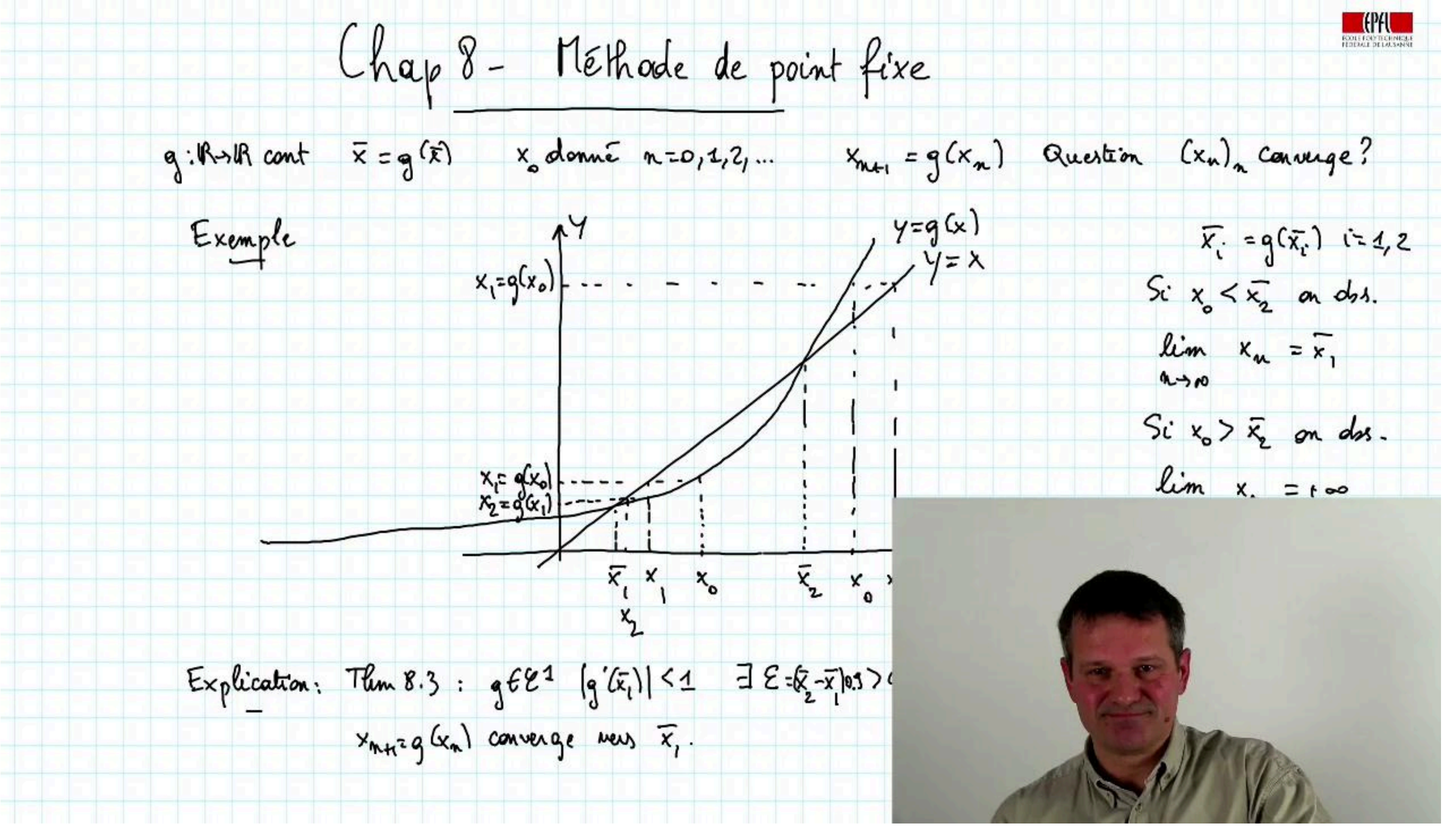
Explication: Thm 8.3 : $g\in\mathcal{C}^1 \quad |g'(\bar{x}_1)|<1 \quad \exists\, \varepsilon=(\bar{x}_2-\bar{x}_1)0.9>0 \quad \forall\ \bar{x}-\varepsilon\le x_0\le \bar{x}+\varepsilon$ la suite déf. par $x_{n+1}=g(x_n)$ converge vers $\bar{x}_1$.

Donc, après, je peux appliquer le théorème 8.1, D'après le théorème 8.3, il existe un epsilon qui est positif, je vais le quantifier tout de suite, tel que si, pour tout *x*0, donc si je choisis *x*0 dans ce voisinage de *x* bar, *x* bar moins epsilon, *x* bar plus epsilon, et bien, la suite définie par *xl* + 1 = *g(xn)*, et bien, cette suite converge vers *x*1 bar, et c'est bien ce que j'ai observé puisque j'ai pris un *x*0 plus petit que *x*2 bar, alors le epsilon, ici je peux le quantifier je peux prendre, par exemple la distance entre *x*1 bar et *x*2 bar, donc voilà le epsilon, je peux le prendre à gauche de *x*2 bar, donc je vais prendre une certaine fois cette distance, donc fois 0.9 par exemple, de façon à partir juste à gauche de *x*2 bar. Donc voilà le epsilon en question et si je choisis le epsilon, le *x*0 dans ce voisinage, *x* bar moins epsilon, *x* bar plus epsilon, et bien ce que j'ai observé, c'est bien que la suite convergeait vers *x*1 bar. Par contre, dans le cas où je prends un epsilon grand, je ne peux rien dire. J'observe dans ce cas-là que la suite diverge mais le théorème ne permet pas d'affirmer que la suite diverge.

Notes

Summary

0m 58s



Dans ce cas-là, il me permet d'affirmer que si le point de départ est suffisamment proche de *x*1 bar, et bien la suite va converger. Donc, dans la suite de ce chapitre, nous allons essayer d'améliorer ce résultat, parce que le point critique ici c'est, donc, il y a deux choses que je ne connais pas dans le théorème 8.3, c'est : est-ce que *g*' de *x* bar est strictement plus petit que 1, et puis, quelle est la taille du voisinage ? Eh bien, ces deux grandeurs ne me sont pas données de manière précise. Et donc, on va voir maintenant la méthode de Newton qui nous permettra au moins d'éliminer cette condition *g*' de *x* bar, strictement plus petit que 1.

Notes

Summary

2m 26s