Chapitre 8 : Méthode de point fixe (fin)

Introduction à l'analyse numérique

Prof. Marco Picasso

Search MOOC

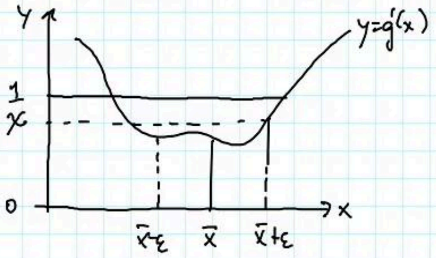
Video

EPFL

Chap 8 - Méthode de point fixe (suite)

Thm 8.3: Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$, soit $\bar{x}$ tq $g(\bar{x})=\bar{x}$, supposons $|g'(\bar{x})|<1$.
Alors $\exists \varepsilon>0$ $\forall$ $\bar{x}-\varepsilon \leq x_0 \leq \bar{x}+\varepsilon$, la suite déf. par $x_{n+1}=g(x_n)$ converge vers $\bar{x}$. De plus la convergence est linéaire :
$\exists$ $0<C<1$ $\forall n$ $|\bar{x}-x_{n+1}| \leq C|\bar{x}-x_n|$.

Dem:



$\exists \varepsilon>0$ $\exists 0<\chi<1$ $\forall \bar{x}-\varepsilon\leq x\leq \bar{x}+\varepsilon$ $|g'(x)|\leq \chi<1$

La démonstration de ce théorème est très instructive, je vous la propose, donc « Démonstration ». Donc, j'ai une fonction ici, je vais représenter ici le graphe de la fonction *g'*, de la dérivée, je sais que la dérivée est plus petite que 1 en valeur absolue. Donc voilà le graphe de la fonction *g'*, et je sais que en *x barre*, *g'(x barre)* est strictement plus petit que 1. La fonction *g'* étant continue, je peux affirmer que cette fonction *g'* reste plus petite que 1 dans un voisinage de *x barre*, c'est-à-dire qu'il existe un *ε* positif, il existe un *χ* qui est positif mais strictement plus petit que 1 tel que pour tout *x* compris entre *x barre* - *ε* et *x barre* + *ε* *g'(x)* en valeur absolue est strictement plus petit ou égal à *χ*, qui est strictement plus petit que 1, je l'ai déjà dit. Donc, je fais le dessin correspondant, voilà le voisinage en question, voilà *x barre* + *ε* et voilà *x barre* - *ε*. Et sur ce voisinage-là, la fonction est plus petite ou égale à *χ*, qui est strictement plus petit que 1.

Notes

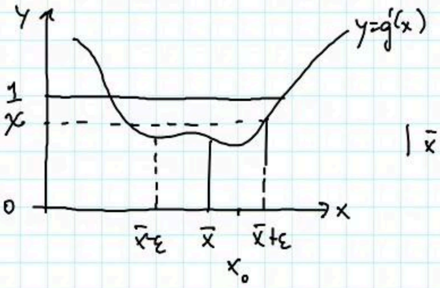
Summary

0m 03s

Chap 8 - Méthode de point fixe (suite)

Thm 8.3: Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$, soit $\bar{x}$ tq $g(\bar{x})=\bar{x}$, supposons $|g'(\bar{x})|<1$.
Alors $\exists \varepsilon>0$ $\forall\ \bar{x}-\varepsilon\leq x_0\leq \bar{x}+\varepsilon$, la suite déf. par $x_{n+1}=g(x_n)$ converge vers $\bar{x}$. De plus la convergence est linéaire :
$\exists\ 0<C<1$ $\forall n$ $|\bar{x}-x_{n+1}|\leq C|\bar{x}-x_n|$.

Dem:



$\exists\varepsilon>0$ $\exists\ 0<\varkappa<1$ $\forall\ \bar{x}-\varepsilon\leq x\leq \bar{x}+\varepsilon$ $|g'(x)|\leq\varkappa<1$

Soit $\bar{x}-\varepsilon\leq x_0\leq\bar{x}+\varepsilon$ on a

$$|\bar{x}-x_1| = |g(\bar{x})-g(x_0)| = \left|\int_{x_0}^{\bar{x}} g'(s)ds\right| \leq |\bar{x}-x_0| \max_{\bar{x}\leq s\leq x_0}|g'(s)|$$

Maintenant, je considère soit *x0* dans ce voisinage, *x barre* - *ε* et *x barre* + *ε*, donc je choisis le *x0* quelque part, ici par exemple, alors on a, on peut faire le calcul suivant, je veux calculer *x barre* - *x1*, pourquoi *x barre* - *x1*, parce que je veux montrer que *x barre* - *xn+1* est plus petit ou égal à quelque chose qui est strictement plus petit que 1, fois *x barre* - *xn*, donc je commence par *x1*. Donc *x barre* - *x1*, je prends la valeur absolue. *x barre* par définition est égal à *g(x barre)*, c'est un point fixe de *g*. Et puis *x1* = *g(x0)*. Maintenant, j'utilise la formule fondamentale du calcul intégral, donc ceci est égal à l'intégrale entre *x0* et *x barre* de *g'(s) ds*. Ceci est plus petit ou égal à la longueur de l'intervalle, en valeur absolue, *x barre* - *x0*, la longueur de l'intervalle, j'ai les bornes *x barre*, *x0* fois le maximum de *g'(s)*, donc l'intégrant, j'ai d'abord dit que la valeur absolue de l'intégrale est plus petite que l'intégrale de la valeur absolue, je prends l'intégrant *g'(s)*, et je cherche le maximum sur l'intervalle [*x barre*, *x0*], conformément à mon dessin, le maximum de l'intervalle [*x barre*, *x0*].

Notes

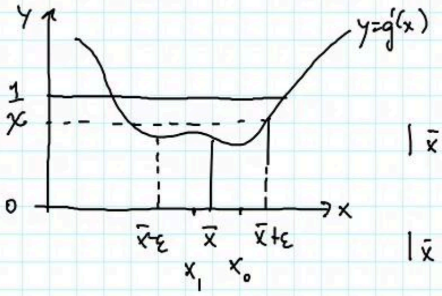
Summary

1m 37s

Chap 8 - Méthode de point fixe (suite)

Thm 8.3: Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ C^1, soit $\bar{x}$ tq $g(\bar{x})=\bar{x}$, supposons $|g'(\bar{x})|<1$.
Alors $\exists\, \varepsilon>0$ $\forall\, \bar{x}-\varepsilon \le x_0 \le \bar{x}+\varepsilon$, la suite déf. par $x_{n+1}=g(x_n)$ converge vers $\bar{x}$. De plus la convergence est linéaire :
$\exists\, 0<C<1$ $\forall n$ $|\bar{x}-x_{n+1}| \le C\,|\bar{x}-x_n|$.

Dem :



$\exists\,\varepsilon>0$ $\exists\, 0<\chi<1$ $\forall\, \bar{x}-\varepsilon\le x\le \bar{x}+\varepsilon$ $|g'(x)|\le \chi<1$

Soit $\bar{x}-\varepsilon\le x_0\le \bar{x}+\varepsilon$ on a

$$|\bar{x}-x_1| = |g(\bar{x})-g(x_0)| = \left|\int_{x_0}^{\bar{x}} g'(s)\,ds\right| \le |\bar{x}-x_0| \max_{\bar{x}\le s\le x_0}|g'(s)| \le |\bar{x}-x_0|\,\chi$$

$$|\bar{x}-x_2| = |g(\bar{x})-g(x_1)| = \left|\int_{x_1}^{\bar{x}} g'(s)\,ds\right| \le |\bar{x}-x_1|\,\chi$$

Mais sur cet intervalle-là, je sais que la fonction est plus petite ou égale à *χ*; donc je peux affirmer que *x barre* - *x1* est plus petit ou égal à *x barre* - *x0* fois le *χ*, qui est strictement plus petit que 1. Je continue, cette fois-ci *x barre* - *x2*, je recommence, *x barre*, c'est *g(x barre)*, c'est la définition du point fixe, *x2*, c'est *g(x1)*, donc c'est l'intégrale entre *x1* et *x barre* de *g'(s) ds* en valeur absolue, et je majore comme tout à l'heure, j'ai ici *x barre* - *x1*, et je dois prendre cette fois-ci le maximum sur l'intervalle [*x barre*, *x1*] ou [*x1*, *x barre*]. Donc, tout à l'heure, j'avais dit que l'erreur *x barre* - *x1* est strictement plus petite que *x barre* - *x0*, donc je peux placer, par exemple *x1* ici. Donc, je répète, *x barre* - *x0* est plus grand que *x barre* - *x1*. Donc le maximum, sur l'intervalle ici, de *g'(s)* sur l'intervalle [*x barre, x1*] sera à nouveau inférieur ou égal, donc *x1* est dans cet intervalle, et bien la dérivée est plus petite que *χ*, et donc ceci sera plus petit ou égal à *(x barre - x1) χ*.

Notes

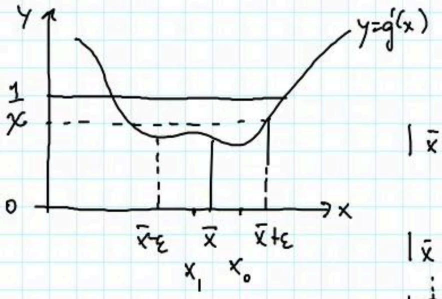
Summary

3m 22s

Chap 8 - Méthode de point fixe (suite)

Thm 8.3 : Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$, soit $\bar{x}$ tq $g(\bar{x})=\bar{x}$, supposons $|g'(\bar{x})|<1$.
Alors $\exists\, \varepsilon>0$ $\forall\, \bar{x}-\varepsilon\le x_0\le\bar{x}+\varepsilon$, la suite déf. par $x_{n+1}=g(x_n)$ converge vers $\bar{x}$. De plus la convergence est linéaire :
$\exists\, 0<C<1$ $\forall n$ $|\bar{x}-x_{n+1}|\le C|\bar{x}-x_n|$.

Dem :



$\exists\,\varepsilon>0$ $\exists\, 0<\chi<1$ $\forall\, \bar{x}-\varepsilon\le x\le\bar{x}+\varepsilon$ $|g'(x)|\le\chi<1$

Soit $\bar{x}-\varepsilon\le x_0\le\bar{x}+\varepsilon$ on a

$$|\bar{x}-x_1| = |g(\bar{x})-g(x_0)| = \left|\int_{x_0}^{\bar{x}} g'(s)\,ds\right| \le |\bar{x}-x_0| \max_{\bar{x}\le s\le x_0}|g'(s)|$$
$$\le |\bar{x}-x_0|\,\chi$$
$$|\bar{x}-x_2| = |g(\bar{x})-g(x_1)| = \left|\int_{x_1}^{\bar{x}} g'(s)\,ds\right| \le |\bar{x}-x_1|\,\chi$$
$$\vdots$$
$$|\bar{x}-x_{n+1}| \le |\bar{x}-x_n|\,\chi$$
$$\le |\bar{x}-x_0|\,\chi^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Exemple : cf ex page pré

Et ainsi de suite, vous voyez bien que je peux répéter par récurrence ce raisonnement, et j'obtiens que *x barre - xn+1* est plus petit ou égal à *(x barre - xn) χ*. Et donc, comme cette quantité-là, donc par induction de nouveau, par récurrence, j'obtiens que *x barre - xn+1* est plus petit ou égal à *(x barre - x0) χ^n+1*, et comme *χ* est compris entre 0 et 1 strictement, et bien lorsque *n* tend vers l'infini, cette quantité-là tend vers 0. J'ai donc bien démontré que la suite définie par *xn+1 = g(xn)* converge et de plus, j'ai démontré que la convergence est linéaire, c'est-à-dire que l'erreur à l'étape *n+1* est strictement plus petite que l'erreur à l'étape *n*. Maintenant, je vous propose de revenir, illustrons, « Exemple », illustrons, donc utilisons ce théorème, sur l'exemple précédent. Donc, exemple, cf exemple de la page précédente.

Notes

Summary

5m 06s