Chapitre 8 : Equations non linéaires – Position du problème

Introduction à l'analyse numérique

Prof. Marco Picasso

Search MOOC

Video

EPFL

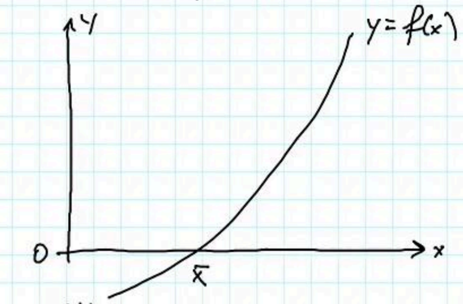
Chap 8 - Equations non linéaires - Position du problème

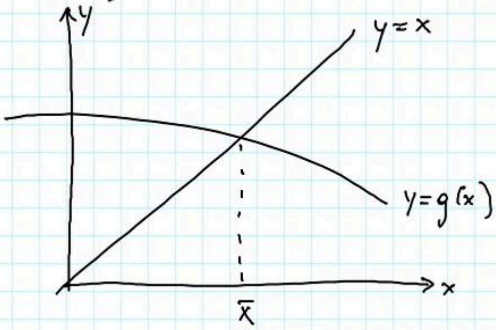
Donné $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, cherche

$(\bar{x} \text{ tq } f(\bar{x}) = 0) \iff (\bar{x} \text{ tq } \bar{x} = g(\bar{x}))$

$\bar{x}$ zéro de f $\qquad$ $\bar{x}$ point fixe de g

On pose $g(x) = x - f($





Commençons par les équations non linéaires. Donc, le problème que nous voulons résoudre est le suivant : On se donne, dans ce qui est donné, c'est une fonction *f* de *R* dans *R* continu, et on cherche *x* barre tel que *f* de *x* barre égal zéro. Donc voici le graphe de la fonction *f* dans le plan *xy*. *y* = *f* de *x*. Et je cherche donc *x* barre, tel que *f* de *x* barre est égal à zéro. Donc, on dit que *x* barre est le zéro de la fonction *f*. Alors je vais écrire ce problème de manière équivalente; C'est-à-dire que je vais chercher maintenant *x* barre, le même *x* barre, tel que *x* barre égal *g* de *x* barre. Et on dit dans ce cas-là que *x* barre est un point fixe de la fonction *g*. Donc je trace maintenant le graphe de la fonction *g* dans le plan *xy*. Donc vous voyez ici, la première bissectrice, et ici, le graphe de la fonction *g*, et je cherche donc ici *x* barre tel que *x* barre est égal à *g* de *x* barre. Alors, comment passer de la fonction *f* qui est donnée, à la fonction *g*, et bien, par exemple, on pose *g(x)* = *x* - *f(x)*.

Notes

Summary

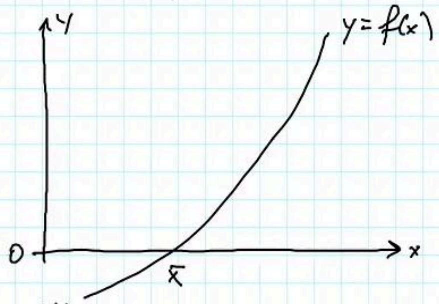
0m 04s

Chap 8 - Equations non linéaires - Position du problème

Donné $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, cherche

$(\bar{x}$ tq $f(\bar{x}) = 0) \Leftrightarrow (\bar{x}$ tq $\bar{x} = g(\bar{x}))$

$\bar{x}$ zéro de f $\qquad$ $\bar{x}$ point fixe de g



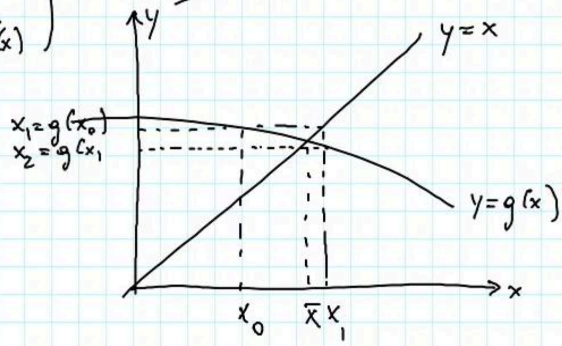
On pose $g(x) = x - f(x)$

ou $g(x) = x - \alpha f(x)$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$ $\left(\text{Newton } \alpha = \frac{1}{f'(x)} \right)$

Méthode de pt fixe: x_0 donné

$x_1 = g(x_0)$

$x_2 = g(x_1)$



De sorte que quand j'évalue cette fonction en x barre, j'obtiens g de x barre égal x barre moins f de x barre, qui est nul. Ou encore, je peux poser $g(x)$ égal x moins n'importe quel alpha fois $f(x)$, et dans ce cas-là, bien évidemment, comme avant, que x barre est à zéro de f si et seulement si x barre est un point fixe de g, et, dans le cas de la méthode de Newton, on pourra remarquer, c'est ce qu'on ferra dans la suite, que le alpha, c'est tout simplement 1 sur la dérivée $f'(x)$. Voilà, donc la méthode que je propose pour trouver x barre, qui est un point fixe de g est la suivante : donc, algorithme, méthode numérique, méthode de point fixe. On se donne un $x0$ dans R, qui est une approximation de x barre, par exemple ici, voilà $x0$. On va calculer $x1 = g(x0)$ Donc, voyez ici, voilà $x0$, voilà $x1 = g(x0)$. Je reporte $x1$ sur l'axe des x, le voici, $x1$. Ensuite, je vais calculer $x2 = g(x1)$, donc je continue ce dessin. $x2 = g(x1)$ se retrouvera ici.

Notes

Summary

1m 36s

Chap 8 - Equations non linéaires - Position du problème

Donné $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, cherche

$(\bar{x}$ tq $f(\bar{x}) = 0) \iff (\bar{x}$ tq $\bar{x} = g(\bar{x}))$

$\bar{x}$ zéro de f $\qquad$ $\bar{x}$ point fixe de g

On pose $g(x) = x - f(x)$

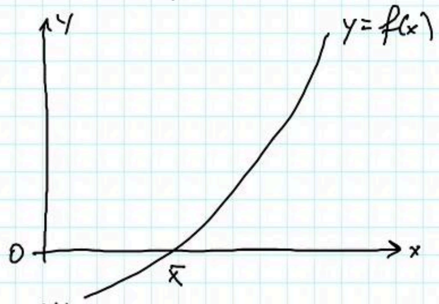
ou $g(x) = x - \alpha f(x)$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$ $\left(\text{Newton } \alpha = \frac{1}{f'(x)} \right)$

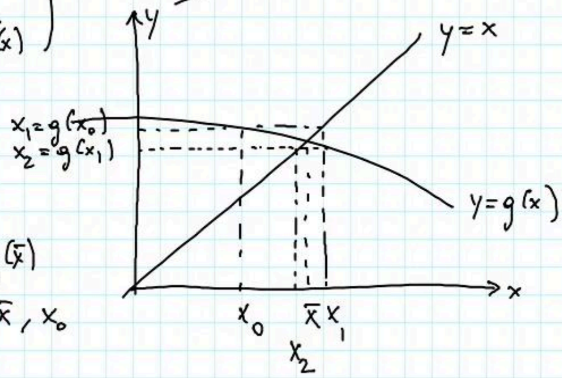
Méthode de pt fixe: x_0 donné

$$x_1 = g(x_0)$$
$$x_2 = g(x_1)$$
$$\vdots$$
$$x_{n+1} = g(x_n)$$

Si la suite $g(x_n)_n$ converge et si g continue, alors $\bar{x} = g(\bar{x})$

Est-ce que la suite $(x_n)_n$ converge? Dépend de $g, \bar{x}, x_0$





Je le reporte sur l'axe des *x*, voilà *x2*. Et, de manière générale, étant donné *xn*, je vais calculer *xn* plus 1 qui est *g(xn)*. Donc la première remarque, c'est que si la suite *xn* converge, et si la fonction *g* est continue, alors la limite satisfait, si j'appelle *x* barre la limite, donc, *x* barre, c'est la limite comme étant à l'infini de *xn*, et bien je prétends que j'ai *x* barre = *g(x barre)*, c'est-à-dire que j'ai bien trouvé *x* barre, qui est un point fixe de *g*. Pourquoi ? Eh bien, il suffit de prendre la limite à gauche et la limite à droite de cette égalité, la fonction *g* étant continue, je peux permuter la limite et la fonction *g*, et j'obtiens bien que *x* barre est égal à *g(x barre)*. Maintenant, la question fondamentale c'est : Est-ce que la suite converge ? La suite *xn*, définie par *xn* plus 1 égal *g(xn)*, est-ce que cette suite converge ? Et la réponse, on verra plus loin, dans le théorème 8.3, ceci dépend de la fonction *g*, de *x* barre, qui est le point fixe de cette fonction *g*, et du point de départ, *x*0.

Notes

Summary

3m 15s