



**Search MOOC**

**Video**

EPFL

# Chap 5 : Décomposition $LL^T$ - Exemple

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} l_1 & & & & (0) \\ m_1 & l_2 & & & \\ & m_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & m_{N-1} & l_N \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} l_1 & m_1 & & & \\ & l_2 & m_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ (0) & & & l_{N-1} & m_{N-1} \\ & & & & l_N \end{pmatrix}}_{L^T}$$

Étudions la décomposition $LL^T$ sur l'exemple d'une matrice tri-diagonale, donc, la matrice $A$, c'est la matrice tri-diagonale qui a 2 sur la diagonale, -1 sur la sous-diagonale et -1 sur la sur-diagonale. Nous allons montrer que cette matrice $A$ est symétrique définie positive, mais si c'est le cas, le résultat du cours, c'est qu'il existe une décomposition $L$, $L^T$, où $L$ est triangulaire inférieure, $L^T$ triangulaire supérieure, les coefficients $l$ et $j$ sont strictement positifs, les coefficients diagonaux, donc je vais noter les coefficients diagonaux $l1$, $l2$ jusqu'à ici $l$ indice $n$, donc pour $L$ transposée, j'aurais aussi $l1$, $l2$, jusqu'à $l$ indice $n$, la matrice $L$ est triangulaire inférieure, donc il y a des zéros sur la partie triangulaire supérieure, et donc ici des zéros sur la partie triangulaire inférieure de $L$ transposée. Et en fait, cette matrice est réduite à une sous-diagonale. La matrice $L$ est réduite à une sous-diagonale de coefficient $m1$, $m2$ jusqu'à $m$ indice $n - 1$ et donc $L^T$ a une matrice sur-diagonale $m1$, $m2$, jusqu'à ici $m$ indice $n$-$1$; ici j'ai $ln$-$1$.

Notes

Summary

0m 00s

# Chap 5 : Décomposition $LL^T$ - Exemple

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} l_1 & & & & (0) \\ m_1 & l_2 & & & \\ & m_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & m_{N-1} & l_N \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} l_1 & m_1 & & & \\ & l_2 & m_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & l_{N-1} & m_{N-1} \\ & & & & l_N \end{pmatrix}}_{L^T}$$

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^N \quad \vec{x}^T A \vec{x} = (x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_N) \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + \cdots - 2x_{N-1}x_N + 2x_N^2$$

Tout d'abord, démontrons que cette matrice *A* est bien symétrique définie positive. Il s'agit de prendre un *x* dans $R^N$ quelconque, et de calculer ***x*** transposé à *x*. Donc ***x*** transposé, c'est le vecteur de composante *x1*, *x2*, jusqu'à *xn*, qui est couché, vous avez la matrice *A*, 2 sur la diagonale, -1 sur la sous-diagonale et -1 sur la sur-diagonale, et le vecteur ***x***, *x1*, *x2*, jusqu'à *xn*. Si je fais le calcul, je vois tout de suite qu'il y a un coefficient qui est de *2x1²*, il y aura aussi *2x2²*, et ainsi de suite, donc il y a *2x1²*, ensuite, il y a un coefficient qui est en -- ici, j'ai - *x2* fois *x1*, donc j'ai - *x1 x2*, et en fait, j'ai - *2 x1 x2* + *2 x2²* - *2 x2 x3*, et ainsi de suite, + *2 x3²*, jusqu'à la fin, où il y a - *2 xn-1 xn*, et le dernier terme qui sera *2xn²*.

Notes

Summary

1m 37s

# Chap 5 : Décomposition $LL^T$ - Exemple

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} l_1 & & & & (0) \\ m_1 & l_2 & & & \\ & m_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & m_{N-1} & l_N \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} l_1 & m_1 & & & \\ & l_2 & m_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & l_{N-1} & m_{N-1} \\ & & & & l_N \end{pmatrix}}_{L^T}$$

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^N \quad \vec{x}^T A \vec{x} = (x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_N) \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + \cdots - 2x_{N-1}x_N + 2x_N^2$$

$$= x_1^2 + (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) + \cdots (x_{N-1}^2 - 2x_{N-1}x_N + x_N^2) + x_N^2$$

$$= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \cdots (x_{N-1} - x_N)^2 + x_N^2$$

Alors j'aimerais montrer que ***x*** transposé à *x* est positif, donc une possibilité c'est de faire apparaître des carrés, *2x1²* c'est *x1² + x1²*, j'ai le double produit - *2 x1 x2* et j'ai *x2²*, donc je peux garder ce terme-là ici, là je vois apparaître un carré, puis ensuite, j'aurais *x2² - 2 x2 x3 + x3²*, et ainsi de suite jusqu'au dernier terme qui serait ici *xn-1² - 2 xn-1 xn + xn²* et encore *xn²*. Donc, vous voyez que cette fois-ci je vois bien les carrés apparaître, *x1² + (x1 - x2)² + (x2 - x3)²* + etc. *(xn-1 - xn)² + xn²*. Donc ***x*** transposé à *x*, c'est une somme de carrés, donc ce terme-là est bien positif ou nul. Et de plus, ***x*** transposé à *x* est égal à zéro, si et seulement si tous ces termes sont nuls puisque ce sont des carrés. Donc j'aurais *x1 = 0*, donc si *x1 = 0*, j'obtiens que *x2 = 0*, et ainsi de suite jusqu'à *xn = 0*. Donc j'ai bien, bien évidemment, cette matrice est symétrique, et donc j'ai bien démontré que cette matrice *A* est symétrique définie positive.

Notes

Summary

2m 57s

# Chap 5 : Décomposition $LL^T$ - Exemple

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} l_1 & & & (0) & \\ m_1 & l_2 & & & \\ & m_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & m_{N-1} & l_N \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} l_1 & m_1 & & & \\ & l_2 & m_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & \ddots & m_{N-1} \\ & & & & l_N \end{pmatrix}}_{L^T}$$

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^N \quad \vec{x}^T A \vec{x} = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_N) \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$$

$$= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + \cdots - 2x_{N-1}x_N + 2x_N^2$$

$$= x_1^2 + (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) + \cdots + (x_{N-1}^2 - 2x_{N-1}x_N + x_N^2) + x_N^2$$

$$= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \cdots + (x_{N-1} - x_N)^2 + x_N^2$$

$2 = l_1^2 \rightarrow l_1 = \sqrt{2}$

$-1 = m_1 l_1 \rightarrow m_1 = -1/l_1$

$2 = m_1^2 + l_2^2 \rightarrow l_2 = \sqrt{2 - m_1^2}$

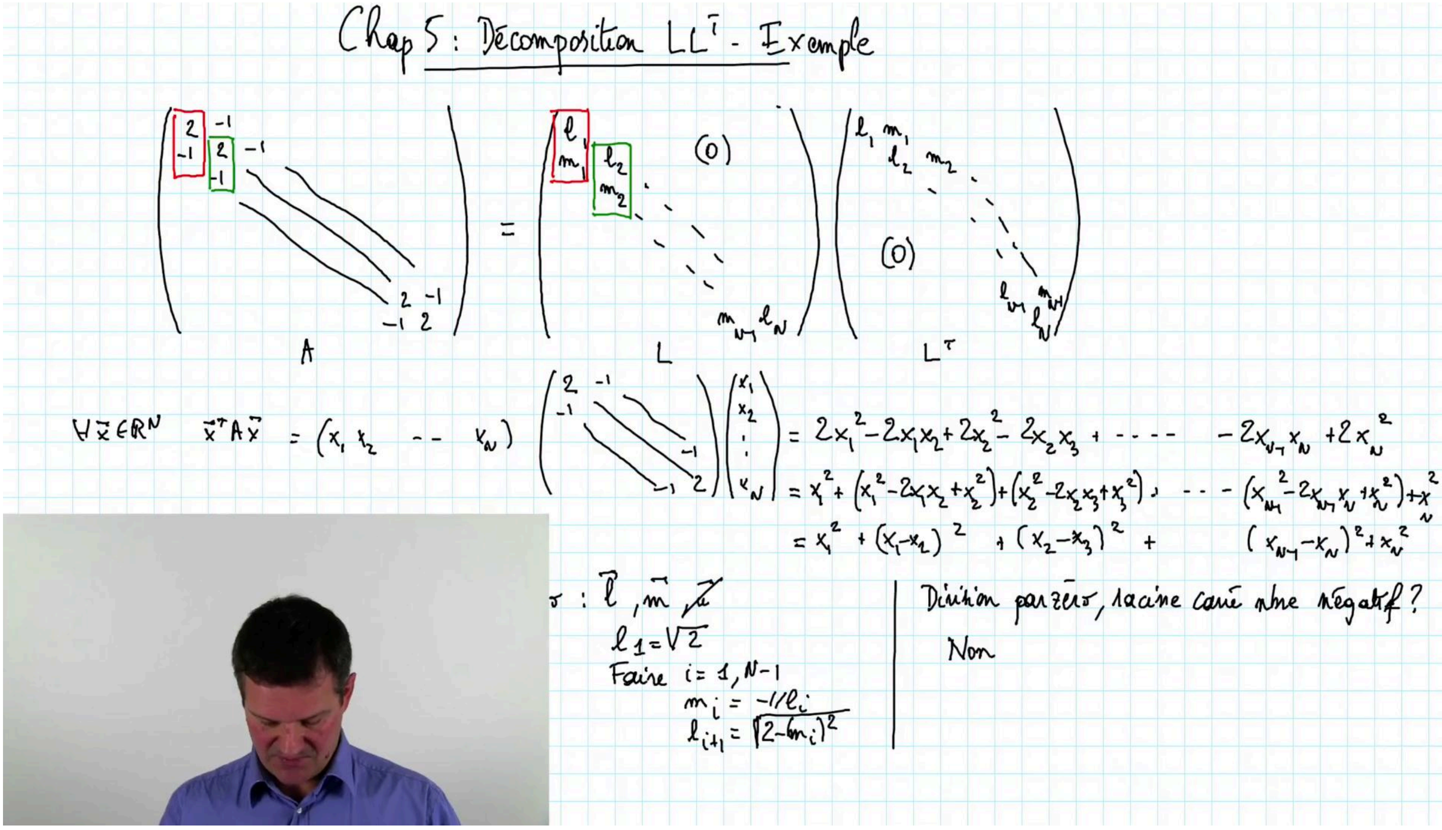
$\Lambda$

Passons à la décomposition de Cholesky, l'algorithme de décomposition de Cholesky, donc je vous ai dit qu'il faut identifier les coefficients de *A* et de $LL^T$ dans le bon ordre, donc je vais commencer par la première colonne, les coefficients de la première colonne de *A* pour obtenir les coefficients de la première colonne de *L*; en effet, le coefficient 2 ici, c'est le coefficient (1, 1) de la matrice *A*, je dois faire produit scalaire entre la première ligne et la première colonne, donc j'obtiens $2 = l1^2$, donc $l1 = \sqrt{2}$. Je continue, j'ai ensuite -1, le coefficient de la deuxième ligne, première colonne, -1 qui est égal à-- donc deuxième ligne, première colonne, *m1* fois *l1*. J'en tire $m1 = -1/l1$. Je continue ensuite, j'identifie les coefficients ici, de la deuxième colonne de *A*, avec les coefficients de la deuxième colonne du produit $L L^T$, et je vais obtenir les coefficients de la deuxième colonne de *L*. Je continue, j'ai 2, le coefficient (2, 2) de la matrice *A* est égal à-- donc 2 ici, c'est le produit scalaire de cette ligne avec cette colonne, donc c'est $m1^2 + l2^2$, j'en tire $l2 = \sqrt{(2 - m1^2)}$, et ainsi de suite, donc je peux maintenant écrire l'algorithme de décomposition *L* de $L^T$ de chaque matrice.

Notes

Summary

4m 43s




« Algorithme » Alors, cet algorithme utilise le vecteur ***l***, qui est le coefficient de composante *l1*, *l2*, jusqu'à *ln*, le vecteur ***m***, qui est le vecteur de composante *m1*, *m2*, jusqu'à *mn-1* et le vecteur ***u***, qui est -- et c'est tout *(**u** barré)*. Et donc, j'initialise l'algorithme, ici, l'initialisation c'est *l1* = √*2*, et ensuite, je fais une boucle pour *i* allant de 1 jusqu'à *n-1*, je vais calculer, à partir de *l1*, je vais calculer *m1*, à partir de *li*, je vais calculer *mi*, qui est égal à *-1/li*. Ensuite, je vais pouvoir calculer *li + 1* égal √*(2 - mi)²*. Donc voilà l'algorithme, et comme précédemment, on peut se poser plusieurs questions, la première question, c'est est-ce qu'il y a une division par zéro ou une racine carrée négative ? - une racine carrée d'un nombre négatif - Et la réponse est non. Non, car premièrement, si la matrice est symétrique définie positive, elle est régulière, et puis ce que je n'ai pas dit, c'est que si la matrice est symétrique définie positive, alors toutes les sous-matrices principales sont régulières aussi, et finalement, si vous obtenez, si vous avez la racine carrée d'un nombre négatif, c'est par contre-apposition, que votre matrice de départ, la matrice *A* n'était pas symétrique définie positive.

Notes

Summary

6m 52s

# Chap 5 : Décomposition $LL^T$ - Exemple

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}2\\-1\end{matrix}} & -1 & & & \\ & \boxed{\begin{matrix}2\\-1\end{matrix}} & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}l_1\\m_1\end{matrix}} & & & (0) \\ & \boxed{\begin{matrix}l_2\\m_2\end{matrix}} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & m_{N-1} & l_N \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} l_1 & m_1 & & \\ & l_2 & m_2 & \\ (0) & & \ddots & \ddots \\ & & l_{N-1} & m_{N-1} \\ & & & l_N \end{pmatrix}}_{L^T}$$

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^N \quad \vec{x}^T A \vec{x} = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_N) \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + \cdots - 2x_{N-1}x_N + 2x_N^2$$

$$= x_1^2 + (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) + \cdots + (x_{N-1}^2 - 2x_{N-1}x_N + x_N^2) + x_N^2$$

$$= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \cdots + (x_{N-1} - x_N)^2 + x_N^2$$

$2 = l_1^2 \rightarrow l_1 = \sqrt{2}$

$-1 = m_1 l_1 \rightarrow m_1 = -1/l_1$

$2 = m_1^2 + l_2^2 \rightarrow l_2 = \sqrt{2 - m_1^2}$

Algo : $\vec{l}, \vec{m}, \cancel{\vec{x}}$

$l_1 = \sqrt{2}$

Faire $i = 1, N-1$

$m_i = -1/l_i$

$l_{i+1} = \sqrt{2 - (m_i)^2}$

Division par zéro, racine carré négatif ?

Non

Nombre d'opération $O(N)$

Donc il n'y a pas de problème division par zéro de racine carrée négative, et le nombre d'opérations, comme tout à l'heure, il reste *O(N)*, c'est-à-dire qu'il est doublé chaque fois que *N* est doublé, tout simplement parce qu'il n'y a qu'une boucle qui va de 1 à *N*.

Notes

Summary

9m 07s