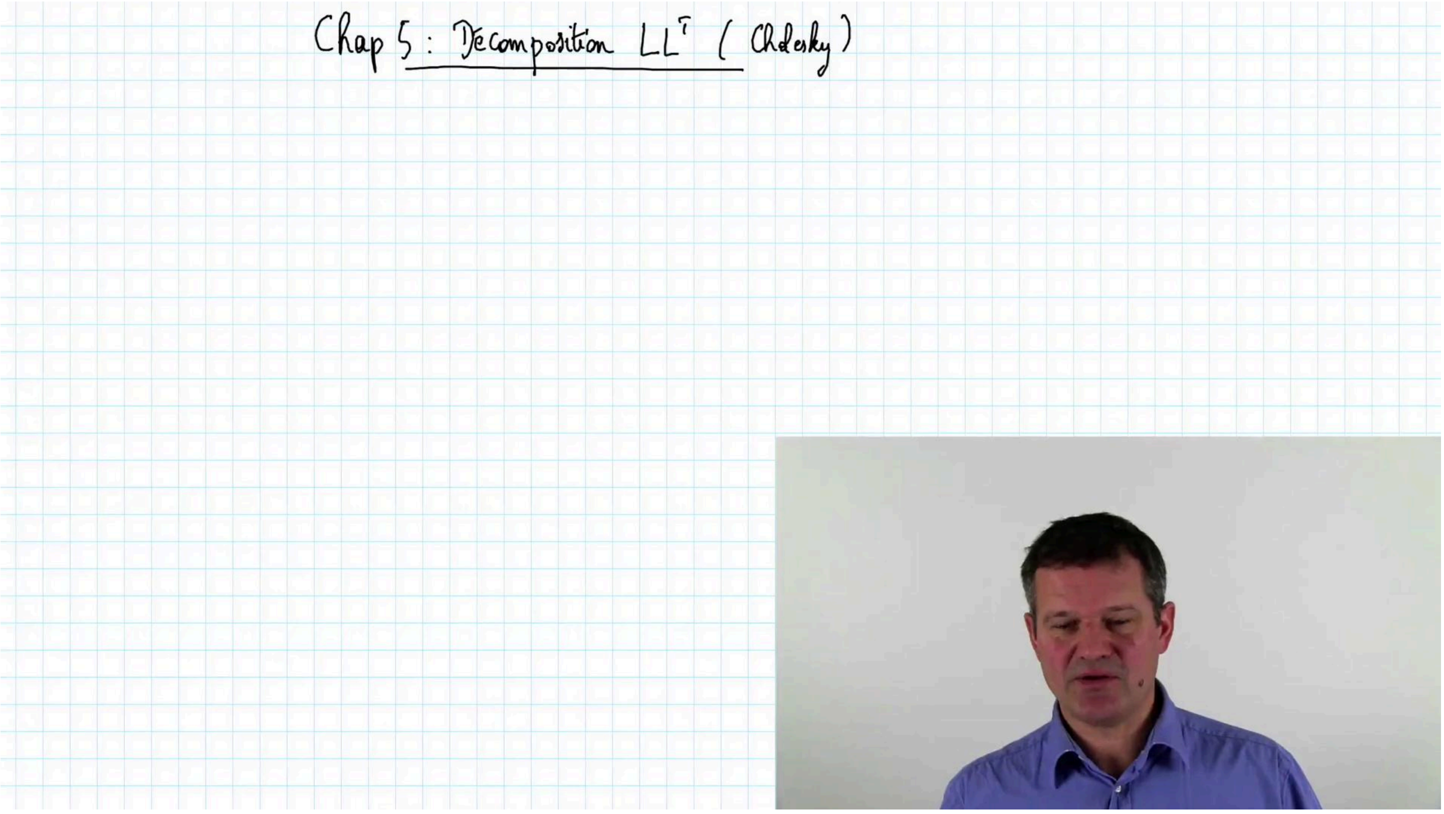

Search MOOC

Video

Chap 5 : Décomposition LL^T (Cholesky)

Déf : A $N\times N$ matrice est symétrique définie positive si

- $A = A^T$ $\quad (a_{ij} = a_{ji} \quad 1 \leq i,j \leq N)$
- $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^N \quad \vec{x}^T A \vec{x} \geqslant 0 \qquad \vec{x}^T A \vec{x} := (\vec{x}, A\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N} x_i (A\vec{x})_i = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} x_i x_j$

Passons maintenant à la décomposition LL^T ou décomposition de Cholesky, qui s'applique au cas particulier où la matrice A est symétrique définie positive. Donc tout d'abord, définition. Donc A, une *N croix N* matrice. Cette matrice est symétrique définie positive, si les trois conditions suivantes sont satisfaites : première, bien évidemment, A est symétrique, A égal A transposé, au sens où les coefficients *aij* sont égaux aux coefficients *aji*, pour tous les *ij* compris entre 1 et N. Deuxième condition, c'est que si je prends un vecteur x quelconque dans *RN*, je calcule x transposé Ax. Cette quantité-là est toujours positive ou nulle. Donc je rappelle que, ici, x transposé Ax, c'est la même chose que le produit scalaire entre x et Ax, c'est-à-dire somme, i allant de 1 à N, du i-ème coefficient vecteur *xi* avec le i-ème coefficient du vecteur Ax, c'est-à-dire somme sur les indices i et j allant de 1 à N, donc somme sur i allant de 1 à N, somme sur j allant de 1 à N de *aij xi xj*.

Notes

Summary

0m 00s

Chap 5 : Décomposition LL^T (Cholesky)

Déf : A $N \times N$ matrice est symétrique définie positive si (sdp)

- $A = A^T$ $\quad (a_{ij} = a_{ji} \quad 1 \leq i,j \leq N)$
- $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^N \quad \vec{x}^T A \vec{x} \geqslant 0 \qquad \vec{x}^T A \vec{x} := (\vec{x}, A\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot (A\vec{x})_i = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} x_i x_j$
- $\vec{x}^T A \vec{x} = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$

Si A est sdp alors il existe L ($l_{ii} > 0$) tq $A = LL^T$ $\quad$ L triang. inf.

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}} = \underset{L}{\begin{pmatrix} l_{11} & & & 0 \\ & l_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & l_{NN} \end{pmatrix}}$$

Donc il s'agit de montrer que ce *x* transposé *Ax* est positif, c'est un scalaire. Et puis, dernière condition, *x* transposé *Ax* égal zéro, si et seulement si *x* est le vecteur nul. Donc si *A* est une matrice symétrique définie positive, donc je vais abréger symétrique définie positive par *sdp*. Si *A* est symétrique définie positive, alors on peut montrer qu'il existe une unique décomposition *A* égal LL^T, donc il existe une matrice *L*, avec des coefficients diagonaux *lii* qui sont strictement positifs, telle que *A* égal *L L* transposé, mais est, elle, triangulaire inférieure. Donc triangulaire inférieure, *lower metrics* en anglais. Donc je peux faire le dessin suivant : Voilà la matrice *A*, qui a des coefficients *a11*, *a1N* sur la première ligne, *a11*, *aN1* sur la première colonne, jusqu'à *aNN*. Cette matrice, si *A* est symétrique définie positive, peut s'écrire comme le produit de *L*, qui est une matrice triangulaire inférieure, *lower* en anglais. Donc, puisqu'elle est triangulaire inférieure, elle a des coefficients *l11*, *l22*, jusqu'à *lNN*, qui sont strictement positifs.

Notes

Summary

1m 49s

Chap 5 : Décomposition LL^T (Cholesky)

Déf : A $N \times N$ matrice est symétrique définie positive si (sdp)

- $A = A^T$ ($a_{ij} = a_{ji}$ $1 \leq i,j \leq N$)
- $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^N$ $\vec{x}^T A \vec{x} \geq 0$ $\quad \vec{x}^T A \vec{x} := (\vec{x}, A\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N} x_i (A\vec{x})_i = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} x_i x_j$
- $\vec{x}^T A \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

Si A est sdp alors il existe L ($l_{ii} > 0$) tq $A = LL^T$ L triang. inf.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{a_{N1}} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{l_{11}} & & (0) \\ \vdots & l_{22} \ddots & \\ \boxed{l_{N1}} & \cdots & l_{NN} \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & \cdots & l_{N1} \\ & l_{22} \ddots & \vdots \\ (0) & & l_{NN} \end{pmatrix}}_{L^T}$$

On identifie les coef de A et LL^T dans l'ordre suivant

La partie triangulaire supérieure a des coefficients non nuls, donc ici vous avez le coefficient *lN1* et ainsi de suite. Et puis *L* transposé, c'est cette même matrice que vous avez transposé. Donc transposé. Les coefficients diagonaux restent les mêmes, *l11*, *l22* jusqu'à *lNN*. La partie triangulaire supérieure qui avait des coefficients nuls se retrouve dans la partie, cette fois-ci, triangulaire inférieure, donc qui a des coefficients nuls. Et puis, ici, vous avez les coefficients de toute à l'heure, *lN1* et ainsi de suite. Donc pour obtenir l'algorithme de décomposition de Cholesky, ou LL^T, simplement il faut faire la moitié du travail par rapport à l'algorithme de décomposition *LU*. Donc on identifie les coefficients comme toute à l'heure. On identifie les coefficients de *A* et *L L* transposé dans l'ordre suivant : Alors comme toute à l'heure, si j'identifie tous les coefficients de la première colonne de *A* avec tous les coefficients de la première colonne du produit *L L* transposé, je vais obtenir tous les coefficients de la première colonne de *L*.

Notes

Summary

3m 34s

Chap 5 : Décomposition LL^T (Cholesky)

Déf : A $N \times N$ matrice est symétrique définie positive si (sdp)

- $A = A^T$ $\quad (a_{ij} = a_{ji} \quad 1 \leq i,j \leq N)$
- $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^N \quad \vec{x}^T A \vec{x} \geq 0 \qquad \vec{x}^T A \vec{x} := (\vec{x}, A\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N} x_i (A\vec{x})_i = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} x_i x_j$
- $\vec{x}^T A \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

Si A est sdp alors il existe L $(l_{ii} > 0)$ tq $A = LL^T$ $\quad L$ triang. inf.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & & (0) \\ \vdots & l_{22} & \\ l_{N1} & \cdots & l_{NN} \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & \cdots & l_{N1} \\ & l_{22} & \vdots \\ (0) & & l_{NN} \end{pmatrix}}_{L^T}$$

On identifie les coef de A et LL^T dans l'ordre suivant

Et cette fois-ci, je peux passer tout de suite à l'identification des coefficients de la deuxième colonne de *A* avec les coefficients de la deuxième colonne du produit *L L* transposé pour obtenir les coefficients de la deuxième colonne de *L*. Je fais la deuxième moitié du travail, et ainsi de suite. Si je prends la troisième colonne, je vais obtenir les coefficients de la troisième colonne de *L L* transposé et à la fin, j'aurais identifié tous les coefficients, disons la moitié des coefficients de *A*, partie triangulaire inférieure, avec les coefficients du produit *L L* transposé, et j'aurais obtenu tous les coefficients de *L*, et par conséquent, puisque *L* transposé c'est la transposée de *L*, tous les coefficients aussi de *L L* transposé. Alors on va voir tout de suite ça sur l'exemple d'une matrice tridiagonale.

Notes

Summary

5m 13s