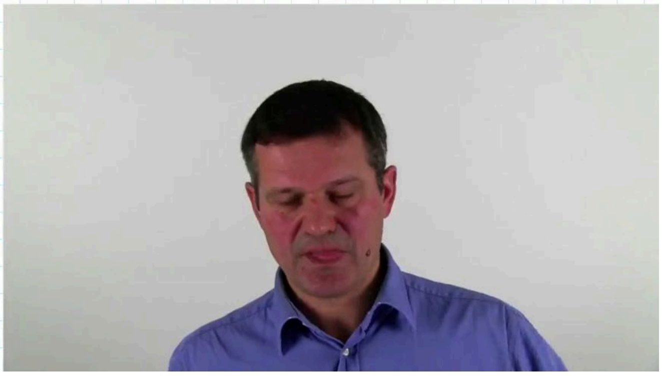
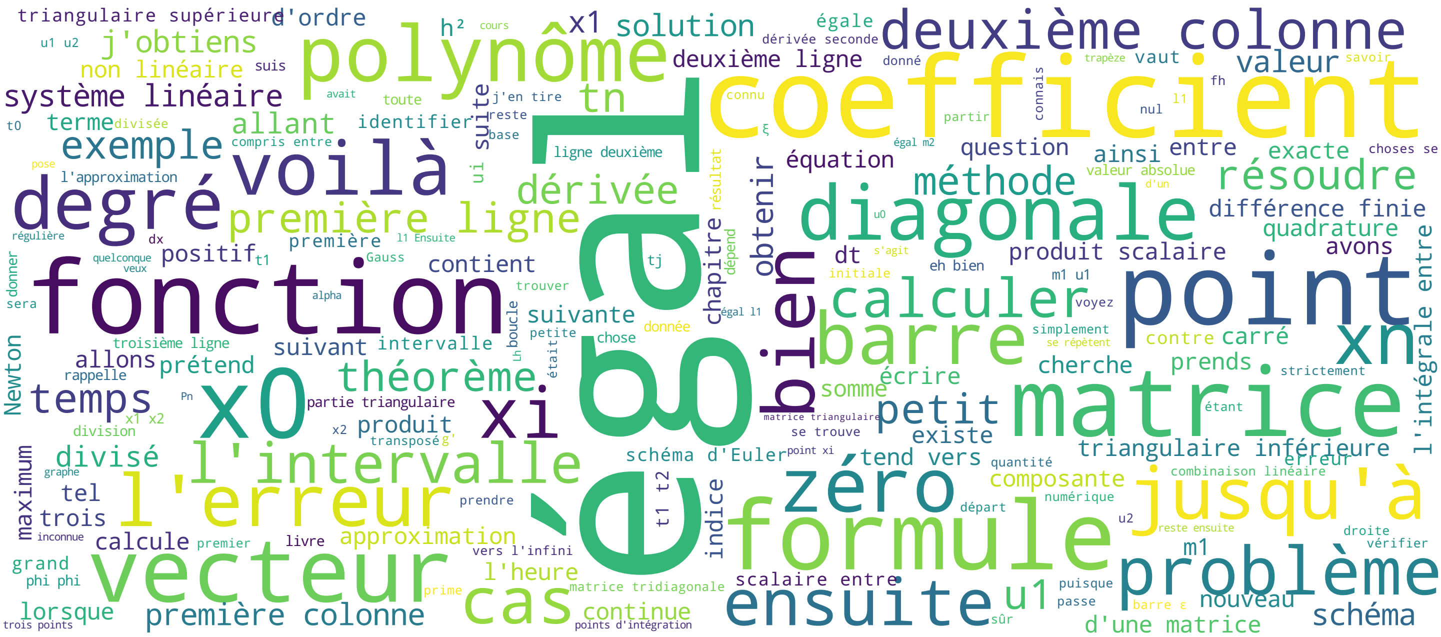
Chap 5 : Décomposition LU - Exemple

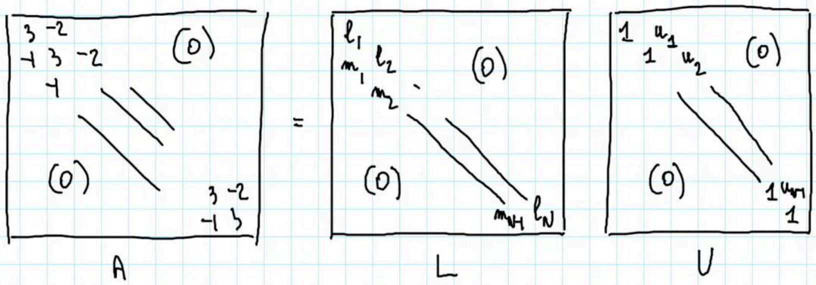




Search MOOC

Video

Chap 5 : Décomposition LU - Exemple



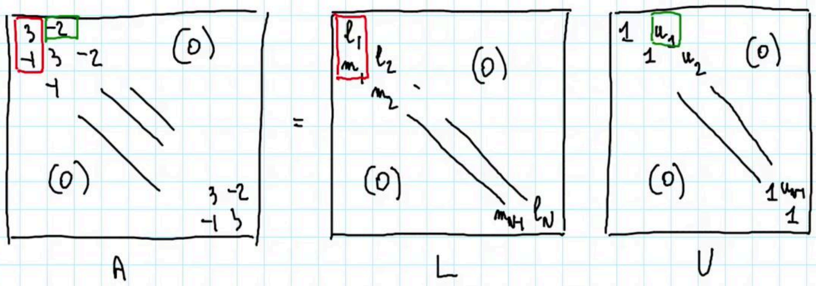
Nous allons maintenant étudier l'algorithme de décomposition LU dans le cadre d'une matrice tridiagonale. Donc la matrice de départ est la matrice tridiagonale de tout à l'heure. C'est la matrice qui contient des 3 sur la diagonale, moins 1 sur la sous-diagonale et moins 2 sur la sur-diagonale. Voilà cette matrice A Je veux l'écrire comme le produit d'une matrice L et d'une matrice U La matrice L est une matrice triangulaire inférieure donc je vais noter l1 l2 jusqu'à lN, les coefficients diagonaux. Ensuite les coefficients sous-diagonaux m1 m2 jusqu'à m(n-1) L est triangulaire inférieure donc il est sûr que la partie triangulaire supérieure ne contient que des zéros. Par contre, à cause de la structure de cette matrice A qui est tridiagonale donc qui contient des zéros en dehors de ces trois diagonales et bien la matrice, elle, sera triangulaire inférieure avec seulement une diagonale et une sous-diagonale. De même avec la matrice U : nous avions décidé qu'elle avait des 1 sur la diagonale, elle est triangulaire supérieure donc contient des zéros sur la partie triangulaire inférieure et cette matrice ne contient qu'un vecteur sur diagonale. J'ai noté ses composantes u1 u2 jusqu'à uN - 1 et les autres termes sont nuls.

Notes

Summary

0m 00s

Chap 5 : Décomposition LU - Exemple



$3 = l_1$

$-1 = m_1$

$-2 = l_1 u_1 \rightarrow u_1 = -2/l_1$

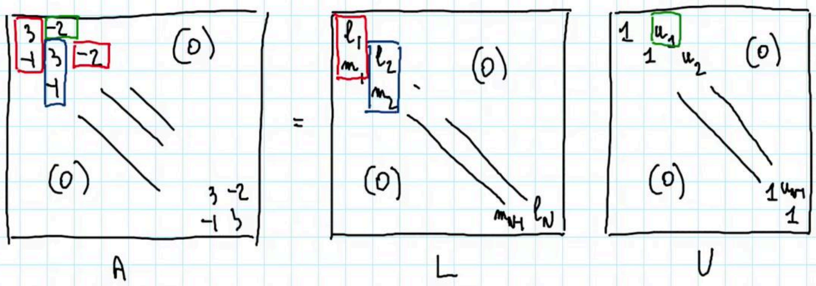
Donc, comme je vous l'ai dit, il faut identifier les coefficients de A avec les coefficients du produit L fois U dans l'ordre adéquate. Ici, si j'identifie les coefficients de la première colonne de A donc les coefficients non nuls qui sont 3 et moins 1 je vais obtenir les coefficients de la première colonne de L. Donc, 3 égal a c'est ici le produit scalaire entre la première ligne de L et la première colonne de U. J'obtiens ici simplement l1 fois 1 c'est-à-dire l1. Donc j'ai déjà l1. Ensuite moins 1, moins 1 égal ici; je dois faire la deuxième ligne de L avec la première colonne de U c'est le coefficient 2 1 J'ai m 1 fois 1, donc moins 1 égal à m1. J'ai déjà m1 et l1. Ensuite, je dois identifier les coefficients de la première ligne de A avec la première ligne du produit L fois U et je prétends que je vais obtenir les coefficients de la première ligne de U à savoir le coefficient ici u1. Je prétends qu'en identifiant ce coefficient là je vais obtenir ce coefficient-là Ici, moins 2 c'est première ligne deuxième colonne, je dois faire le produit scalaire entre la première ligne de L et la deuxième colonne de U et j'obtiens moins 2 égal l1 fois u1 moins 2 égal l1 fois u1 et j'en tire u1 qui est moins 2 sur l1.

Notes

Summary

2m 02s

Chap 5 : Décomposition LU - Exemple



$3 = l_1$
$-1 = m_1$
$-2 = l_1 u_1 \rightarrow u_1 = -2/l_1$
$3 = m_1 u_1 + l_2 \rightarrow l_2 = 3 - m_1 u_1$
$-1 = m_2$
$-2 = l_2 u_2$

Algorithme : $\vec{l}$

Je continue : je dois maintenant identifier les coefficients de la deuxième colonne de A avec les coefficients correspondant dans le produit L fois U. Je prétends que je vais obtenir les coefficients de la deuxième colonne de L. 3 est le résultat du produit scalaire entre la deuxième ligne et la deuxième colonne. 3 est égal à m1 u1 + l2 fois 1 J'en tire l2 qui est égal à 3 fois m1 u1. Je continue, j'ai ici le coefficient moins 1, troisième ligne deuxième colonne. Je dois faire le produit scalaire : la troisième ligne et la deuxième colonne ce qui va me donner : moins 1 égal m2. Donc, je vois ici que les choses se répètent puisque j'ai moins 1 égal m1 moins 1 égal m2 Je peux calculer encore m2 si l'on souhaite pour être sûr que les choses se répètent. Si je calcule le coefficient (en rouge) le coefficient moins 2 ici, c'est donc la troisième ligne deuxième colonne donc ici deuxième ligne troisième colonne j'aurai moins 2 égal l2 fois u2 et auparavant j'avais moins 2 égal à l1 fois u1. Maintenant je peux écrire un algorithme. L'algorithme va me donner en sortie des vecteurs l.

Notes

Summary

4m 19s

Chap 5 : Décomposition LU - Exemple

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 & & & (0)\\ -1 & 3 & -2 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \ddots & 3 & -2\\ & & & -1 & 3\end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} l_1 & & & & (0)\\ m_1 & l_2 & & & \\ & m_2 & \ddots & & \\ (0) & & \ddots & \ddots & \\ & & & m_{N-1} & l_N\end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & u_1 & & & (0)\\ & 1 & u_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ (0) & & & 1 & u_{N-1}\\ & & & & 1\end{pmatrix}}_{U}$$

$3 = l_1$
$-1 = m_1$
$-2 = l_1 u_1 \rightarrow u_1 = -2/l_1$
$3 = m_1 u_1 + l_2 \rightarrow l_2 = 3 - m_1 u_1$
$-1 = m_2$
$-2 = l_2 u_2$

Algorithme : $\vec{l}$ N vecteur l_j
$\vec{m}$ N-1 vect m_j
$\vec{u}$ N-1 vect u_j

$l_1 = 3$
Faire $i = 1, N-1$
$m_i = -1$
$u_i = -2/l_i$
$l_{i+1} = 3 - m_i u_i$

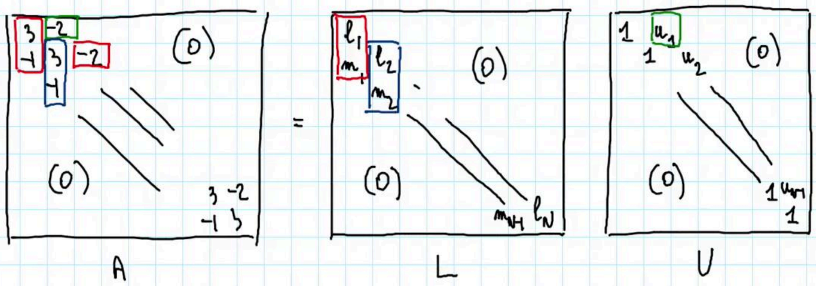
N vecteurs de coefficient lj le vecteur n, donc n c'est la diagonale de la matrice L m est la sous-diagonale de la matrice L c'est un vecteur de longueur N-1 coefficient mj et puis u est la sur-diagonale de la matrice U est N moins 1 vecteur coefficient uj. Donc, je commence l'algorithme : l 1 égal à 3 c'est la partie initialisation. Ensuite je fais une boucle pour faire i égal 1 jusqu'à N moins 1 Donc j'ai calculé l1, je dois ensuite calculer m1 donc mi puisque je suis dans la boucle. mi est égal à moins 1, m1 est égal à moins 1, m2 est égal à moins 1 Ensuite une fois que j'ai m1 je peux calculer ici u1 ui est égal à moins 2 sur li Ici u1 égal moins 2 sur l1 u2 égal moins 2 sur l2. Et ensuite une fois que j'ai m1 et u1 je peux calculer l2 Lorsque j'ai m i et u i, je peux calculer l i plus 1 l(i+1) égal 3 moins mi fois ui Je vérifie bien que les indices sont corrects : l2 est bien 3 moins m1 u1 c'est correct. Puis pour le dernier indice, (il faut toujours vérifier le premier et le dernier) lorsque je suis à i égal à l moins 1 je vais calculer l N qui est 3 moins m indice N moins 1 u indice N moins 1 donc les choses sont correctes.

Notes

Summary

6m 48s

Chap 5 : Décomposition LU - Exemple



$3 = l_1$
$-1 = m_1$
$-2 = l_1 u_1 \rightarrow u_1 = -2/l_1$
$3 = m_1 u_1 + l_2 \rightarrow l_2 = 3 - m_1 u_1$
$-1 = m_2$
$-2 = l_2 u_2$

Algorithme : $\vec{l}$ N vecteur l_j
$\vec{m}$ N-1 vect m_j
$\vec{u}$ N-1 vect u_j

$l_1 = 3$
Faire $i = 1, N-1$
$m_i = -1$
$u_i = -2/l_i$
$l_{i+1} = 3 - m_i u_i$

O(N) opérations
Si toutes les ss-matrices principales de A sont régulières, alors pas division par zéro.

De nouveau, deux remarques à propos de cet algorithme : il nécessite O(N) opération puisqu'il y a une boucle à faire de 1 à N moins 1 et puis peut-il y avoir de nouveau des divisions par zéro ? La réponse est la même que tout à l'heure : si toutes les sous-matrices principales de A sont régulières, au sens inversible, alors il n'y a pas de division par zéro. Il reste ensuite à résoudre un système linéaire A x égal B reste ensuite à résoudre les deux systèmes linéaires Ly égal B et Ux égal y mais ce sont des opérations faciles puisqu'on a à faire à des matrices qui sont triangulaires inférieures ou triangulaires supérieures.

Notes

Summary

9m 13s