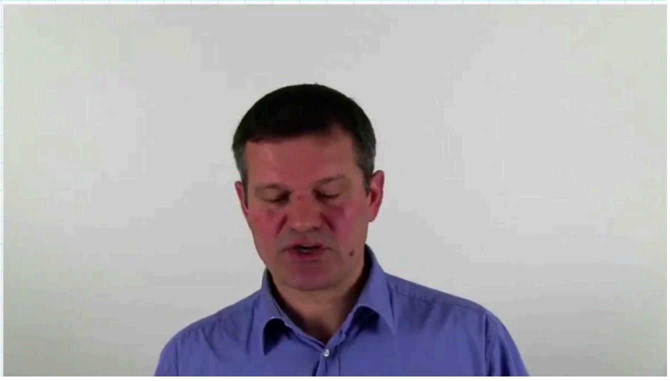
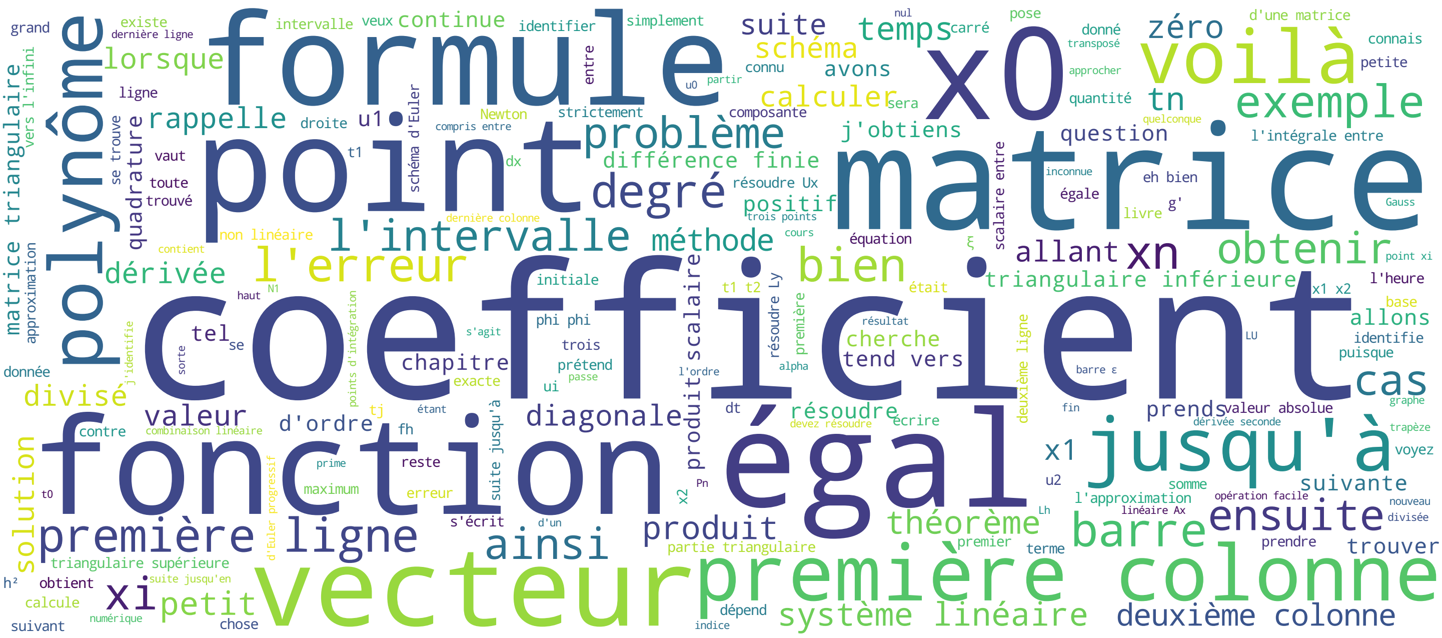
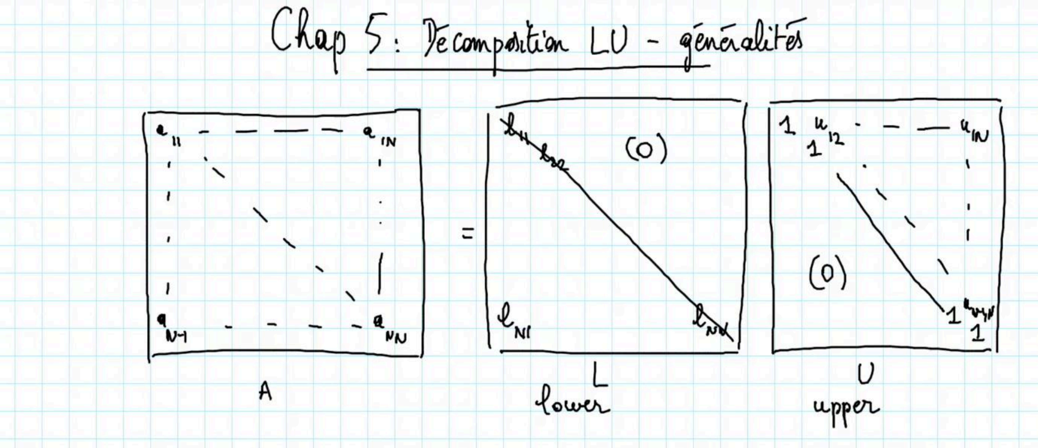
Chap 5 : Décomposition LU - généralités

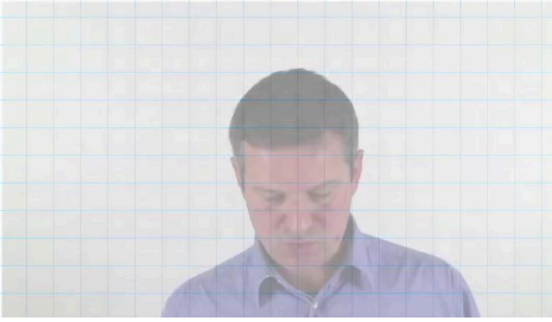




Search MOOC

Video



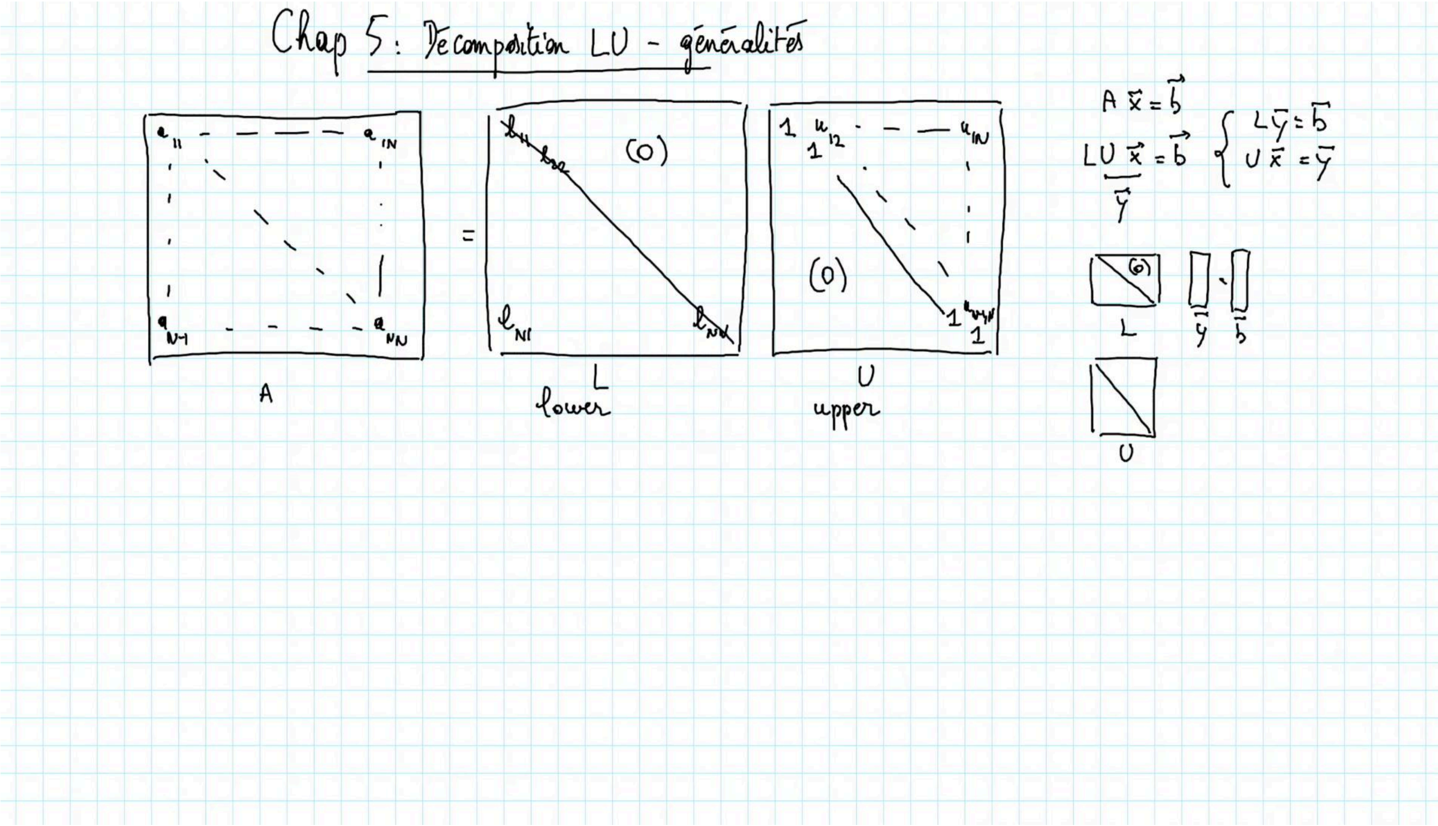


Passons maintenant au chapitre 5 du livre : décomposition LU, décomposition de Choleski. Je veux résoudre le système linéaire AX = B et je vais décomposer la matrice A (matrice à N lignes et N colonnes) comme le produit d'une matrice L et d'une matrice U Toutes ces matrices sont des matrices à N lignes et N coefficients. La matrice A a comme coefficient a a1 sur la première ligne a aN première ligne, dernière colonne. Ici première colonne finit à a N1 et ici le dernier coefficient aNN Voilà la matrice A. Les matrices L et U : nous avons déjà parlé de la matrice U, c'est une matrice (en anglais 'upper matrix') une matrice triangulaire supérieure et nous avons tout à l'heure décidé qu'il y aurait des 1 sur la diagonale 0 sur la partie triangulaire inférieure. Ici un coefficient U 1 2 et U 1 N ici jusqu'à U N -1 N1 La matrice L est une matrice triangulaire inférieure ('lower matrix') Donc la diagonale, la partie triangulaire supérieure ne contient que des 0 et les coefficients L 1 1, L 2 2 jusqu'à ici L N N avec le coefficient ici L N 1, dernière ligne première colonne.

Notes

Summary

0m 00s



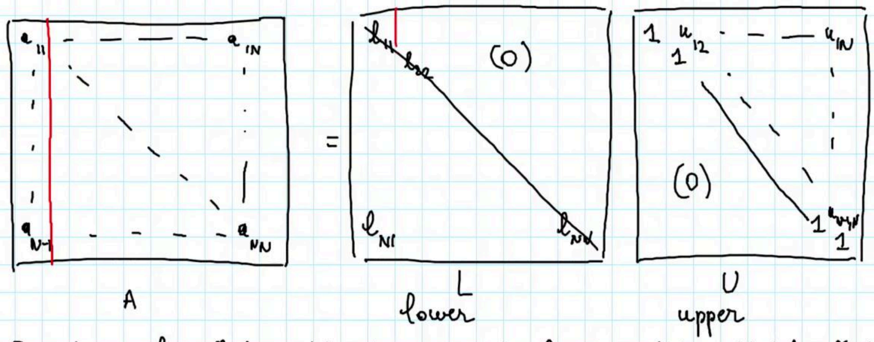
Supposons qu'on sache écrire A, le travail est de trouver les matrices L et U, triangulaires inférieures et supérieures de sorte que A soit égal à LU Ce qui est donné, je vous le rappelle, c'est la matrice A ce qu'on cherche ce sont les matrices L et U tel que A = L U Si on sait faire une telle opération, il est alors facile de résoudre le système linéaire. Pourquoi ? Je rappelle que vous voulez résoudre un système linéaire Ax = b Vous avez A qui s'écrit comme le produit de L fois U donc vous devez résoudre L U x = b et vous allez découper ce système linéaire en deux. Si je pose ici y = Ux et bien je dois résoudre Ly = b ceci est une opération facile : je vous rappelle que L est une matrice triangulaire inférieure donc quand je dois résoudre Ly = b et bien je vais commencer par le haut. J'ai L A1 y1 = b1 ensuite je vais calculer y2 et ainsi de suite jusqu'en bas, donc résoudre Ly = b lorsque L est triangulaire inférieure est une opération facile. Une fois que j'ai trouvé y, je dois résoudre Ux = y Je connais maintenant y puisque j'ai résolu Ly = b et donc résoudre Ux = y est aussi une opération simple, j'ai vu ceci tout à l'heure : vous avez vu U matrice triangulaire supérieure.

Notes

Summary

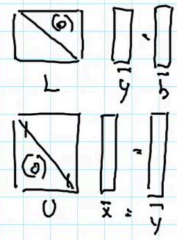
2m 00s

Chap 5 : Décomposition LU - généralités



$A\vec{x}=\vec{b}$

$L\underbrace{U\vec{x}}_{\vec{y}}=\vec{b}$ $\begin{cases} L\vec{y}=\vec{b}\\ U\vec{x}=\vec{y}\end{cases}$



Pour obtenir les coef des matrices L et U, on identifie les coef de A et LU dans l'ordre suivant :

1ère étape : on identifie les coef de la 1ère col. de A et LU : on obtient les coef de la 1ère col. de L

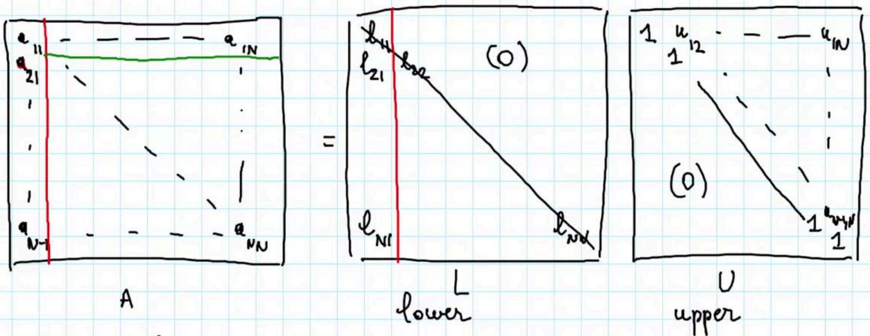
Ici il y a des 0 et il y a des 1 sur la diagonale et donc vous connaissez le vecteur y le vecteur y est connu, vous venez de résoudre Ly = b et maintenant vous devez résoudre Ux = y et cette fois-ci vous partez par le bas, vous avez xN = yN et ainsi de suite jusqu'en haut. Alors la question qui se pose maintenant est comment trouver les coefficients de L et U ? C'est assez simple, pour trouver les coefficients de L et U on identifie simplement les coefficients de la matrice A avec les coefficients du produit L fois U dans le bon ordre. Pour obtenir les coefficients des matrices L et U on identifie les coefficients de la matrice A et de la matrice LU dans l'ordre suivant. Ce dont il faut se souvenir,c'est l'ordre dans lequel on identifie ces coefficients. La première étape est la suivante : (je change de couleur) on va identifier les coefficients de la première colonne de A et LU. Voilà la première colonne de A. Si j'identifie les coefficients de la première colonne de A avec les coefficients de la première colonne du produit L fois U, je prétends qu'on obtient les coefficients de la première colonne de la matrice L qui se trouve ici.

Notes

Summary

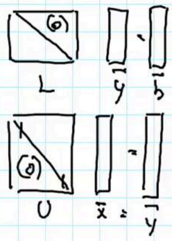
3m 45s

Chap 5 : Décomposition LU - généralités



$A\vec{x}=\vec{b}$

$\underbrace{LU\vec{x}}_{\vec{y}}=\vec{b}$ $\quad \begin{cases} L\vec{y}=\vec{b} \\ U\vec{x}=\vec{y} \end{cases}$



Pour obtenir les coef des matrices L et U, on identifie les coeff de A et LU dans l'ordre suivant :

1ère étape : on identifie les coeff de la 1ère col. de A et LU : on obtient les coeff de la 1ère col. de L $\quad a_{11}=\ell_{11}\cdot 1$; $a_{21}=\ell_{21}\cdot 1$

2e étape : ______ ligne ______ ______ ligne de U

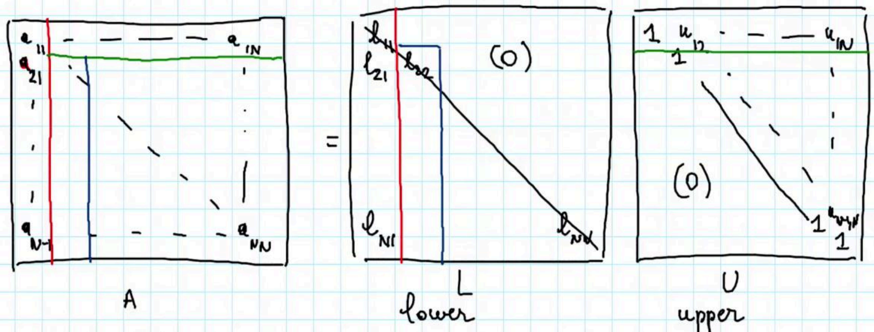
En effet, faisons ainsi pour le premier coefficient par exemple, vous avez le coefficient A1, c'est le produit de la première ligne de L avec la première colonne de U Vous voyez que quand je fais le produit première ligne de L/première colonne de U je dois faire le produit scalaire de cette ligne avec cette colonne ici, j'ai simplement L 1 1 fois 1 cela je peux l'écrire : a 1 1 = l 1 1 fois 1 donc j'ai trouvé l 1 1 Je peux faire maintenant le coefficient a 1 2 par exemple, j'ai ici le coefficient a 1 2 je dois faire le produit scalaire entre la deuxième ligne de L et toujours la première colonne de U Donc ici j'ai le coefficient, que je peux rajouter ces coefficients ici. a 2 1 ici vous avez l 2 1 donc quand je fais le calcul, j'obtiens a 2 1 égal l 2 1 fois 1 Donc a 2 1 égal l 2 1 fois 1 et ainsi de suite. Donc si j'identifie les coefficients de la première colonne de A et la première colonne de LU j'obtiens tous les coefficients de la première colonne de L Maintenant je continue, deuxième étape : cette fois-ci on identifie les coefficients de la première ligne de A avec les coefficients de la première ligne du produit L fois U et cette fois-ci je veux obtenir les coefficients de la première ligne de U Je prends tous les coefficients qui sont ici.

Notes

Summary

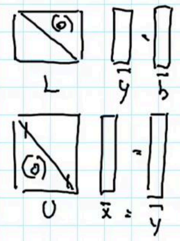
6m 15s

Chap 5 : Décomposition LU - généralités



$A\vec{x} = \vec{b}$

$\underbrace{LU\vec{x}}_{\vec{y}} = \vec{b}$ $\begin{cases} L\vec{y} = \vec{b} \\ U\vec{x} = \vec{y} \end{cases}$



Pour obtenir les coeff des matrices L et U, on identifie les coeff de A et LU dans l'ordre suivant :

1ère étape : on identifie les coeff de la 1ère col. de A et LU : on obtient les coeff de la 1ère col. de L $a_{11} = \ell_{11} \cdot 1$; $a_{21} = \ell_{21} \cdot 1$

2e étape : ——— ligne ——— ——— ligne de U

3e étape : ——— 2 col de A et LU : ——— 2e col. de L

Je vais les identifier au produit L fois U et je vais obtenir tous les coefficients qui sont là. Par exemple, pour le premier : vous avez ici le coefficient a 1 2 je dois faire le produit scalaire de la première ligne de L et de la deuxième colonne de U Je vais obtenir ce coefficient U 1 2 ainsi de suite sur tous les coefficients. Lorsque je vais identifier a 1 N, produit scalaire entre première ligne de L et dernière colonne de U je vais obtenir ce coefficient U 1 N Et après, on continue de la même manière. Troisième étape : on identifie les coefficients de la deuxième colonne de A et deuxième colonne de LU et on obtient les coefficients de la deuxième colonne de L Voilà tous les coefficients que je vais identifier : ce sont ceux de la deuxième colonne de A et je vais obtenir les coefficients de la deuxième colonne de L donc tous les coefficients qui vont de L 2 2 à L N 2 et je continue de la même manière jusqu'à la fin. J'identifie ces coefficients-là je vais obtenir ces coefficients-là et ensuite ceux-là pour obtenir ceux-là, et ainsi de suite, jusqu'à la fin et j'aurai obtenu tous les coefficients de L et tous les coefficients de U Nous allons voir maintenant ces décompositions LU sur une matrice tridiagonale.

Notes

Summary

8m 34s