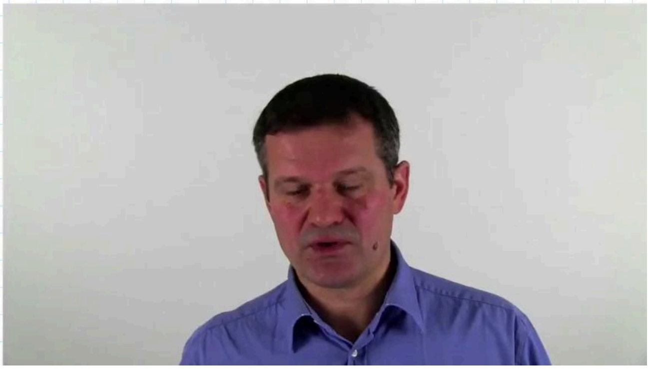
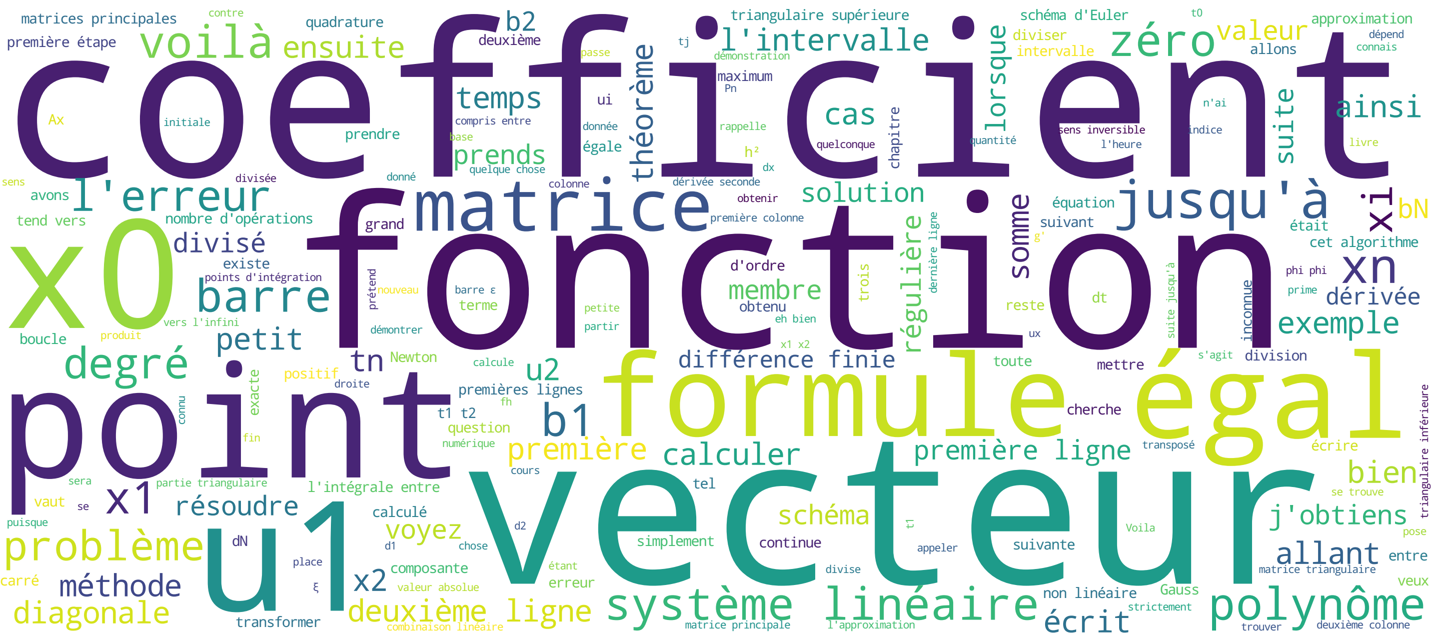
Chap 4 : Elimination de Gauss - Exemple



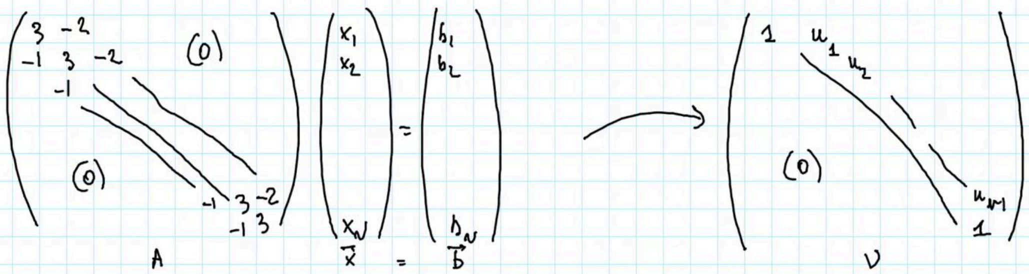


Search MOOC

Video

EPFL

Chap 4 : Elimination de Gauss - Exemple



Nous allons étudier l'algorithme d'élimination de Gauss sur un exemple. Je veux résoudre le système linéaire *Ax* = *b*. *x* est le vecteur des inconnues, *x1*, *x2* jusqu'à *xN*. *b* c'est le second membre du problème, *b1*, *b2* jusqu'à *bN*, et la matrice *A* a une structure particulière c'est une matrice tridiagonale. Donc il y a une diagonale ici, ce sont des 3, une sous-diagonale de -1, *(écrit)* et une sur-diagonale de -2. *(écrit)* Tous les autres coefficients de la matrice sont nuls. Voilà la matrice *A* du système linéaire *Ax* = *b* que je dois résoudre. Nous verrons que, dans les chapitres 10 à 14, lorsqu'on discrétise des équations dérivées partielles à une dimension de l'espace, on aboutit généralement à des matrices tridiagonales. Donc, le but est de transformer ce système linéaire *Ax* = *b* en un système linéaire équivalent *ux* = *d*. *u* est une matrice triangulaire supérieure, donc j'ai des 1 sur la diagonale de cette matrice, la partie triangulaire inférieure est zéro, puisque j'ai décidé que *u* était une matrice triangulaire supérieure, et, en fait, à cause du fait que la matrice ici est tridiagonale et bien je vais avoir une partie triangulaire supérieure qui est réduite à une sur-diagonale de coefficients *u1*, *u2* jusqu'à *uN-1*.

Notes

Summary

0m 00s

Chap 4 : Elimination de Gauss - Exemple

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 & & & (0) \\ -1 & 3 & -2 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \ddots & \ddots & -2 \\ & & & -1 & 3 & -2 \\ & & & & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}}_{\vec{b}} \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & u_1 & & & \\ & 1 & u_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ (0) & & & \ddots & u_{N-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \end{pmatrix}}_{\vec{d}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \overset{u_1}{-2/3} & \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1/3 \\ b_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Voila le vecteur *x* des inconnues, c'est toujours le même, et puis le second membre, lui aura changé, donc c'est le vecteur *d* de coefficient *d1*, *d2* jusqu'à *dn*. Alors quelles sont les étapes de l'algorithme ? Première étape, j'ai dit je veux avoir 1 ici, zéro ici. Il y a déjà des zéros en-dessous, donc je dois transformer ce 3 en 1 et ce 1 en 0. Donc pour transformer ce 3 en 1, je prend la première ligne qui est *3 x1 - 2 x2 = b1*, je prends cette première ligne et je la divise par 3, le coefficient diagonal. Donc j'obtiens... 1 (une fois *x1*) - 2/3 (de *x2*), égal *b1* que je dois diviser par 3, donc dans l'algorithme je vais appeler *u1*, j'ai déjà trouvé *u1* ici, ce coefficient, et puis je dois diviser *b1* par 3. Donc je dessine ici uniquement les deux premières lignes du système linéaire que j'obtiens. Ici sur la deuxième ligne j'ai toujours -1, 3, -2. Voila le début des premières lignes du système linéaire. Ici j'ai toujours *b2*, qui continue jusqu'en bas. Ensuite, je vais transformer ce -1 en 0, donc je fais la somme de la première et de la deuxième ligne.

Notes

Summary

1m 51s

Chap 4 : Elimination de Gauss - Exemple

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 & & & (0) \\ -1 & 3 & -2 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 3 & -2 \\ (0) & & & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ x_N \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \\ b_N \end{pmatrix}}_{\vec{b}} \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & u_1 & & & \\ & 1 & u_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & \ddots & u_{N-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_N \end{pmatrix}}_{\vec{d}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \overset{u_1}{-\frac{2}{3}} & \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{b_1}{b_1/3} \\ b_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & u_1 & \\ 0 & 3+u_1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1+b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & u_1 & \\ 0 & 1 & \overset{u_2}{-2/(3+u_1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \frac{b_1+b_2}{3+u_1} \end{pmatrix}$$

Lorsque je somme la première et la deuxième ligne, je vais avoir ici un zéro. Donc j'aurais 1, *u1*, toujours *x1*, *x2*, ensuite j'aurais 0 ici, (3 + *u1*), j'ai fait la somme de la première et de la deuxième ligne, et -2 + 0 au-dessus. Au second membre, je ne l'ai pas dit mais ceci, je vais aussi l'appeler *b1*, donc ici j'ai *b1* et à la deuxième ligne, j'ai *b1* + *b2*. Je fais la somme de la première et de la deuxième ligne. Voila mon système linéaire. *(écrit)* Ici. Ce que je veux pour arriver à mes fins, je veux un 1 ici, donc je dois transformer ce (3 + *u1*) en 1, je dois donc diviser cette deuxième ligne par (3 + *u1*). J'ai 1 *u1* sur la première ligne, ici *x1*, *x2*. Ici, j'ai *b1*, lorsque je divise cette deuxième ligne par (3 + *u1*) j'obtiens bien un 1 à la place de (3 + *u1*), j'ai ici -2 / (3+*u1*). Vous voyez je vais appeler ceci *u2*, voilà le *u2* que je cherche. Je dois aussi prendre le second membre *b1* + *b2* et le diviser par (3 + *u1*). Donc j'ai déjà obtenu, dans mon système linéaire, j'ai déjà obtenu ici, *u1*, *u2* et aussi *d1* et *d2*.

Notes

Summary

3m 29s

Chap 4 : Elimination de Gauss - Exemple

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 & & & (0) \\ -1 & 3 & -2 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & -1 & 3 & -2 \\ & & & & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}}_{\vec{b}} \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & u_1 & & \\ & 1 & u_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & (0) & & 1 & u_{N-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \end{pmatrix}}_{\vec{d}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \overset{u_1}{-2/3} & \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{b_1}{b_1/3} \\ b_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & u_1 & \\ 0 & 3+u_1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1+b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & u_1 & \\ 0 & 1 & \overset{u_2}{-2/(3+u_1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \frac{b_1+b_2}{3+u_1} \end{pmatrix}$$

Algo : $\vec{b}$ Nvect b_j
$\vec{u}$ (N-1)vect u_j

$u_1 = -2/3$ $\quad b_1 = b_1/3$

$i = 2, N-1$

$\quad u_i = -2/(3+u_{i-1})$

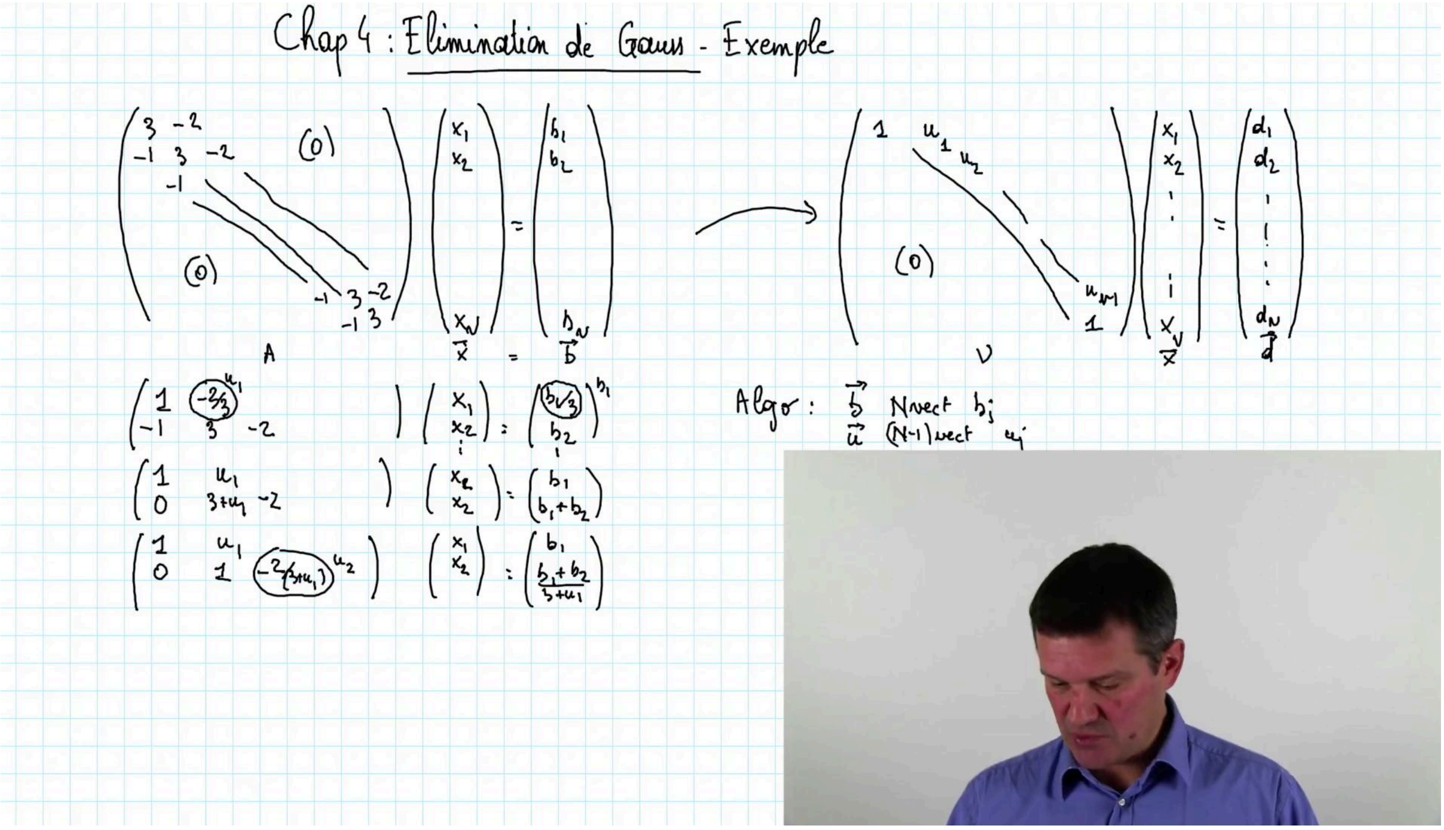
$\quad b_i = (b_i + b_{i-1})/(3+u_{i-1})$

Je peux maintenant écrire un algorithme d'élimination de Gauss. Nous sommes partis de *b*... *N* vecteur de coefficient *bj*, *j* allant de 1 à *N*, et puis nous avons besoin du vecteur *u* qui est la sur-diagonale de la matrice *u*, qui a, comme c'est un vecteur, *N-1* vecteur de coefficient *uj*. Alors, allons-y, qu'est-ce qu'on a fait ? La première étape, c'était de poser *u1* = -2/3 et aussi *b1* = (*b1*) / 3, j'avais divisé la première ligne par 3. C'est l'étape d'initialisation. *u1* = -2/3 et *b1* = (*b1*) / 3. Ensuite, je vais faire une boucle, là j'ai fait que la première étape, j'ai fait que la deuxième ligne, mais il faut imaginer que l'on va aller jusqu'à la dernière ligne, ou l’avant-dernière. Je fais une boucle pour *i* allant de 2 jusqu'à *N-1*, jusqu'à l'avant-dernière ligne. Je pose ici, vous voyez, j'ai *u2* = -2 / (3+*u1*), donc *ui* sera égal à -2 / (3 + *u(i-1)*), donc pour *i* = 2... j'ai déjà calculé *u1*, qui apparait ici. Ensuite, je dois faire le travail sur le second membre, *bi* = (*bi* + *(bi-1)*), divisé par (3 + (*ui-1*)).

Notes

Summary

5m 18s



Ce coefficient-là, $b2$, ce serait $(b1 + b2) / (3 + u1)$. Lorsque j'ai fini cette boucle, qui va de 2 à $N-1$, j'ai calculé $uN-1$, ici, et j'ai calculé $bN-1$. Ce qu'il me manque, c'est encore calculer la dernière composante du vecteur d. Ce que je n'ai pas dit ici, c'est que les vecteurs b et d seront stockés dans le vecteur b ici. Donc il me faut simplement faire la dernière opération sur le coefficient bN, $bN = (bN + (bN-1)) / (3 + u(N-1))$. J'ai obtenu tous les coefficients $u1$, $u2$ jusqu'à $uN-1$ de la matrice u, triangulaire supérieure, et les coefficients $d1$, $d2$ jusqu'à $dN-1$ du second membre, que j'ai mis dans le vecteur b. Maintenant, il me reste plus qu'à résoudre le système linéaire, ici, $ux = d$, en commençant par le bas. $xN = dN$, $xN-1 = d(N-1) - u(N-1)\ xN$, qu'on a déjà calculé, et ainsi de suite jusqu'à avoir $x1$. Alors on peut se poser deux questions en ce qui concerne cet algorithme, la première question est : combien d'opérations sont nécessaires pour mettre en œuvre cet algorithme ?

Notes

Summary

7m 15s

Chap 4 : Elimination de Gauss - Exemple

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 & & & (0) \\ -1 & 3 & -2 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & 3 & -2 \\ & & & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}}_{\vec{b}} \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & u_1 & & & \\ & 1 & u_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & \ddots & u_{N-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \end{pmatrix}}_{\vec{d}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \overset{u_1}{-2/3} & \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{b_1}{b_1/3} \\ b_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & u_1 & \\ 0 & 3+u_1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1+b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & u_1 & \\ 0 & 1 & \overset{u_2}{-2/(3+u_1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \frac{b_1+b_2}{3+u_1} \end{pmatrix}$$

Algo : $\vec{b}$ N vect b_j

$\vec{u}$ (N-1) vect u_j

$u_1 = -2/3 \qquad b_1 = b_1/3$

$i = 2, N-1$

$\quad u_i = -2/(3+u_{i-1})$

$\quad b_i = (b_i + b_{i-1})/(3+u_{i-1})$

$b_N = (b_N + b_{N-1})/(3+u_{N-1})$

La réponse est simple, le nombre d'opérations... vous voyez ici, il y a une boucle qui va de 2 à *N-1*, donc le nombre d'opérations de cet algorithme, nombre d'opérations... *(écrit)* on parle de complexité de l'algorithme, c'est *O(N)*, au sens où, si vous doublez *N*, vous doublez le nombre d'opérations. La deuxième question que l'on se pose c'est : est-ce qu'il peut dans cet algorithme... vous voyez il y a des divisions par 3 + (*ui-1*), 3+ (*uN-1*)... peut-il y avoir une division par 0 ? Donc, est-ce qu'on a une division par 0 ? *(écrit)* On peut affirmer le résultat suivant sans démonstration : si toutes les sous-matrices principales de *A* sont régulières, *(écrit)* au sens inversibles, alors il n'y a pas de division par zéro. *(écrit)* Donc je peux mettre en œuvre cet algorithme, sans avoir de soucis. Alors maintenant, que sont les sous-matrices principales de *A* ? La première sous-matrice principale de *A*, c'est le coefficient *A1*. La deuxième sous-matrice principale de *A*, ce sont les deux premières lignes, restriction des deux premières lignes et des deux premières colonnes.

Notes

Summary

8m 51s

Chap 4 : Elimination de Gauss - Exemple

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 & & & (0) \\ -1 & 3 & -2 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ (0) & & -1 & 3 & -2 \\ & & & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}}_{\vec{b}} \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & u_1 & & & \\ & 1 & u_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ (0) & & & \ddots & u_{N-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \end{pmatrix}}_{\vec{d}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \overset{u_1}{-2/3} & \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1/3 \\ b_2 \\ \vdots \end{pmatrix} b_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & u_1 & \\ 0 & 3+u_1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1+b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & u_1 & \\ 0 & 1 & \overset{u_2}{-2/(3+u_1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \frac{b_1+b_2}{3+u_1} \end{pmatrix}$$

Algo : $\vec{b}$ N vect b_j
$\vec{u}$ (N-1) vect u_j

$u_1 = -2/3 \qquad b_1 = b_1/3$

$i = 2, N-1$

$\quad u_i = -2/(3+u_{i-1})$

$\quad b_i = (b_i + b_{i-1})/(3+u_{i-1})$

$b_N = (b_N + b_{N-1})/(3+u_{N-1})$

La première sous-matrice principale de *A*, c'est ici la matrice 3 3 des coefficients, disons, *Aij*, *ij* compris entre 1 et 3, et ainsi de suite. Vous voyez bien que cette matrice, la première c'est 3, elle est régulière, la deuxième, si vous calculez le déterminant, vous trouvez quelque chose qui est différent de zéro, et ainsi de suite, il s'agit de démontrer que toutes les sous-matrices principales de *A* sont régulières et à ce moment là vous avez aucun soucis. Donc la première chose à dire que je n'ai pas dite, c'est que cette matrice *A* est régulière au sens inversible et toutes les sous-matrices principales de cette matrice sont aussi régulières, au sens inversibles, vous verrez ça par vous-mêmes.

Notes

Summary

10m 38s