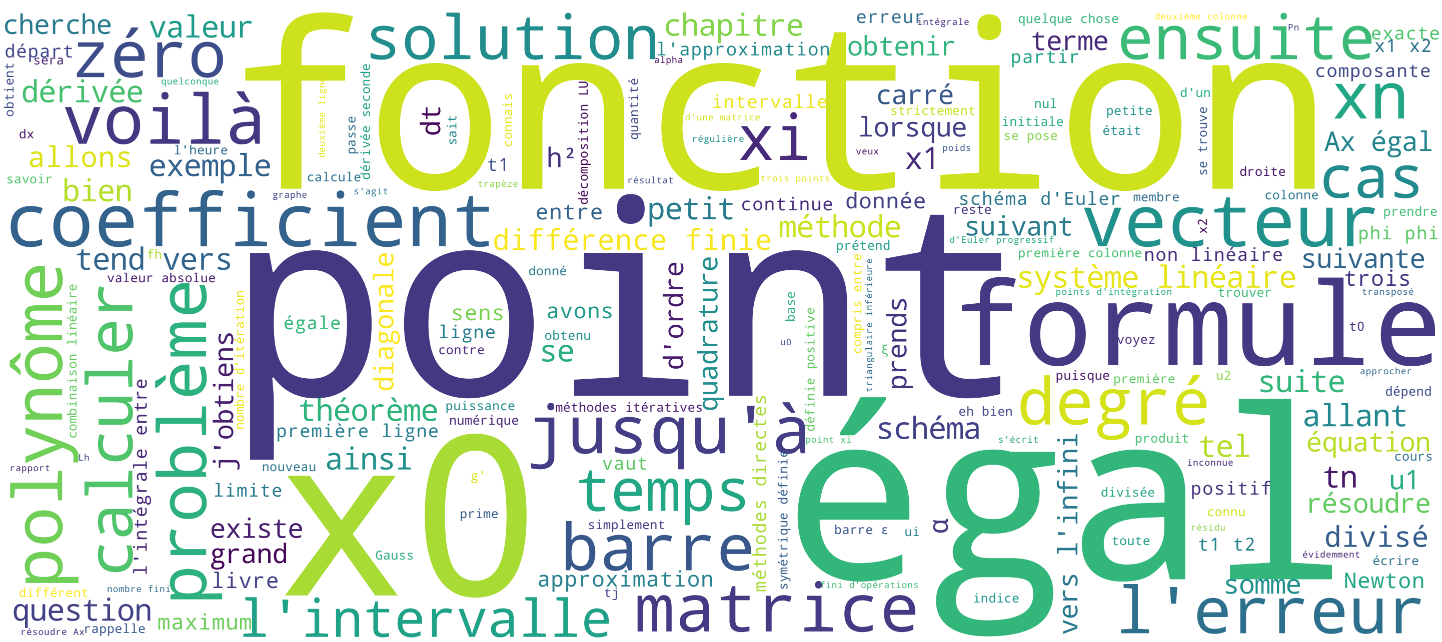


Search MOOC

Video

EPFL

# Chap 4,5,6 : Résolution de systèmes linéaire

N entier pos. $10 \to 10^9$

donné $\left\{ \begin{array}{l} A \text{ matrice } N\times N \text{ coef } a_{ij} \; 1\leq i,j \leq N \text{ régulière (inversible, } A^{-1} \text{ existe, det } A\neq 0, \ldots) \\ \vec{b} \; N \text{ vecteur coef } b_j \; 1\leq j\leq N \end{array} \right.$

Cherche $\vec{x}$ N vecteur $x_j$ tq $A\vec{x} = \vec{b}$

Chap 4,5 : méthode

Bonjour et bienvenue à cette quatrième leçon. Nous allons aborder aujourd'hui les chapitres 4, 5, 6 du livre : résolution de systèmes linéaires. Le problème que nous voulons résoudre est le suivant : on donne N un entier positif destiné à être grand dans les applications N va de 10 à 10 puissance 9 un milliard. On se donne ensuite une matrice A à N lignes et N colonnes les coefficients je vais les noter aij ij allant de 1 jusqu'à N Je demande évidemment que cette matrice soit régulière c'est le terme du numéritien pour dire inversible, c'est-à-dire A moins 1 existe (nous n'avons jamais calculé A moins 1) ou par exemple déterminant de A différent de zéro et ainsi de suite. Il existe d'autres caractérisations de matrice inversible. On se donne évidemment aussi b à N vecteurs de coefficient composante bj j allant de 1 à N Ceci sont les données du problème. Et on cherche x N à vecteurs aussi de coefficient xj j allant de 1 à N tel que A x soit égal à b Alors, dans le livre, vous allez trouver les chapitres 4, 5 et 6 sur ce problème. Nous allons dans ce cours uniquement aborder les chapitres 4 et 5. Ce sont les méthodes directes.

Notes

Summary

0m 01s

# Chap 4,5,6 : Résolution de systèmes linéaire

N entier pos. $10 \to 10^9$

donné $\left\{ \begin{array}{l} A \text{ matrice } N \times N \text{ coeff } a_{ij} \quad 1 \leq i,j \leq N \text{ régulière (inversible, } A^{-1} \text{ existe, } \det A \neq 0, \dots) \\ \vec{b} \text{ N vecteur coeff } b_j \quad 1 \leq j \leq N \end{array} \right.$

Cherche $\vec{x}$ N vecteur $x_j$ tq $A\vec{x} = \vec{b}$

Chap 4,5 : méthode directes : élimination Gauss, décomposition $LU$, $LL^T$

$\vec{x}$ obtenu après 1 nombre fini d'opérations

Chap 6 : méthode itératives.

Les mots-clés sont : élimination de Gauss, c'est une méthode que vous avez déjà abordée dans le cours d'algèbre linéaire. Aujourd'hui nous allons reprendre cette méthode et en voir une autre qui s'appelle : décomposition LU d'une matrice A égal LU et, éventuellement, décomposition de Cholesky où LL transposé si A est symétrique définie positive. Pourquoi appelle-t-on ces méthodes des méthodes directes ? Car on obtient la solution de Ax égal B donc x est obtenu après un nombre fini d'opérations. Compter le nombre d'opérations est quelque chose d'important car résoudre un système linéaire coûte cher au sens où il demande beaucoup d'opérations donc il faut attendre beaucoup de temps pour obtenir la solution. Il faut donc se poser la question de savoir combien d'opérations je dois faire pour obtenir le résultat. Méthode directe X est obtenu après un nombre fini d'opérations contrairement aux méthodes itératives et cela est l'objectif du chapite 6 mais nous n'allons pas aborder ce chapitre dans le cadre de ce cours.

Notes

Summary

2m 07s

# Chap 4,5,6 : Résolution de systèmes linéaire

N entier pos. $10 \to 10^9$

donné $\begin{cases} A \text{ matrice } N \times N \text{ coeff } a_{ij} \quad 1 \leq i,j \leq N \text{ régulière (inversible, } A^{-1} \text{ existe, det } A \neq 0, \ldots) \\ \vec{b} \text{ N vecteur coeff } b_j \quad 1 \leq j \leq N \end{cases}$

Cherche $\vec{x}$ N vecteur $x_j$ tq $A\vec{x} = \vec{b}$

Chap 4,5 : méthode directes : élimination Gauss, décomposition $LU$, $LL^T$

$\vec{x}$ obtenu après 1 nombre fini d'opérations

Chap 6 : méthode itératives : $\vec{x}^0$ donné $\vec{x}^1, \ldots, \vec{x}^n, \vec{x}^{n+1}$ $\lim_{n \to \infty} \vec{x}^n = \vec{x}$

Méthode itérative : on veut résoudre Ax égal b on se donne un point de départ x 0, ensuite à partir de x 0 on va calculer une premier approximation x 1 de x et ainsi de suite de manière générale étant donné x N, on va calculer x N + 1 qui est, si possible, une meilleure approximation de x tel que Ax égal b Et la question qu'on se pose évidemment dans ces méthodes itératives, c'est : plus je fais d'itérations, est-ce que limite en N tend vers l'infini de x N égal x, c'est-à-dire après un grand nombre d'itérations, est-ce que je suis proche de la solution du système linéaire Ax égal b ?

Notes

Summary

3m 32s

# Chap 4,5,6 : Résolution de systèmes linéaire

N entier pos. $10 \to 10^9$

donné $\left( \begin{array}{l} A \text{ matrice } N\times N \text{ coeff } a_{ij} \; 1\leq i,j \leq N \text{ régulière (inversible, } A^{-1} \text{existe, det } A\neq 0, \dots) \\ \vec{b} \; N \text{ vecteur coeff } b_j \; 1\leq j \leq N \end{array} \right.$

Cherche $\vec{x}$ N vecteur $x_j$ tq $A\vec{x}=\vec{b}$

Chap 4,5 : méthode directes : élimination Gauss, décomposition LU, $LL^T$

$\vec{x}$ obtenu après 1 nombre fini d'opérations

Chap 6 : méthode itératives : $\vec{x}^0$ donné $\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^n, \vec{x}^{n+1}$ $\lim_{n\to\infty} \vec{x}^n = \vec{x}$

Ex: $\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + \alpha(\vec{b} - A\vec{x}^n)$ $\alpha \neq 0$

Typiquement comme exemple on peut considérer, pour fixer les idées, je veux résoudre Ax égal b je connais x N donc je vais calculer ce que j'appelle le résidu b moins A x N Si A x N est nul alors j'ai trouvé la solution de mon système linéaire sinon, je vais calculer x N + 1 en écrivant X N + 1 égal x N + α fois le résidu b moins 1 x N donc ici α dans R différent de zéro et puis la question qui se pose est de savoir sous quelle valeur de α la méthode converge au sens où limite quand N tend vers l'infini et x N égal x et ceci évidemment pour tout second membre b du système linéaire et pour tout point de départ x zéro Donc voilà la problématique des méthodes itératives donc a priori on ne sait pas le nombre d'itérations qu'on va faire On ne sait pas si la méthode va converger donc il y a des questions théroriques importantes pour répondre à ces questions. Nous, dans notre cours, nous allons nous concentrer sur les méthodes directes élimination Gauss et décomposition LU

Notes

Summary

4m 21s