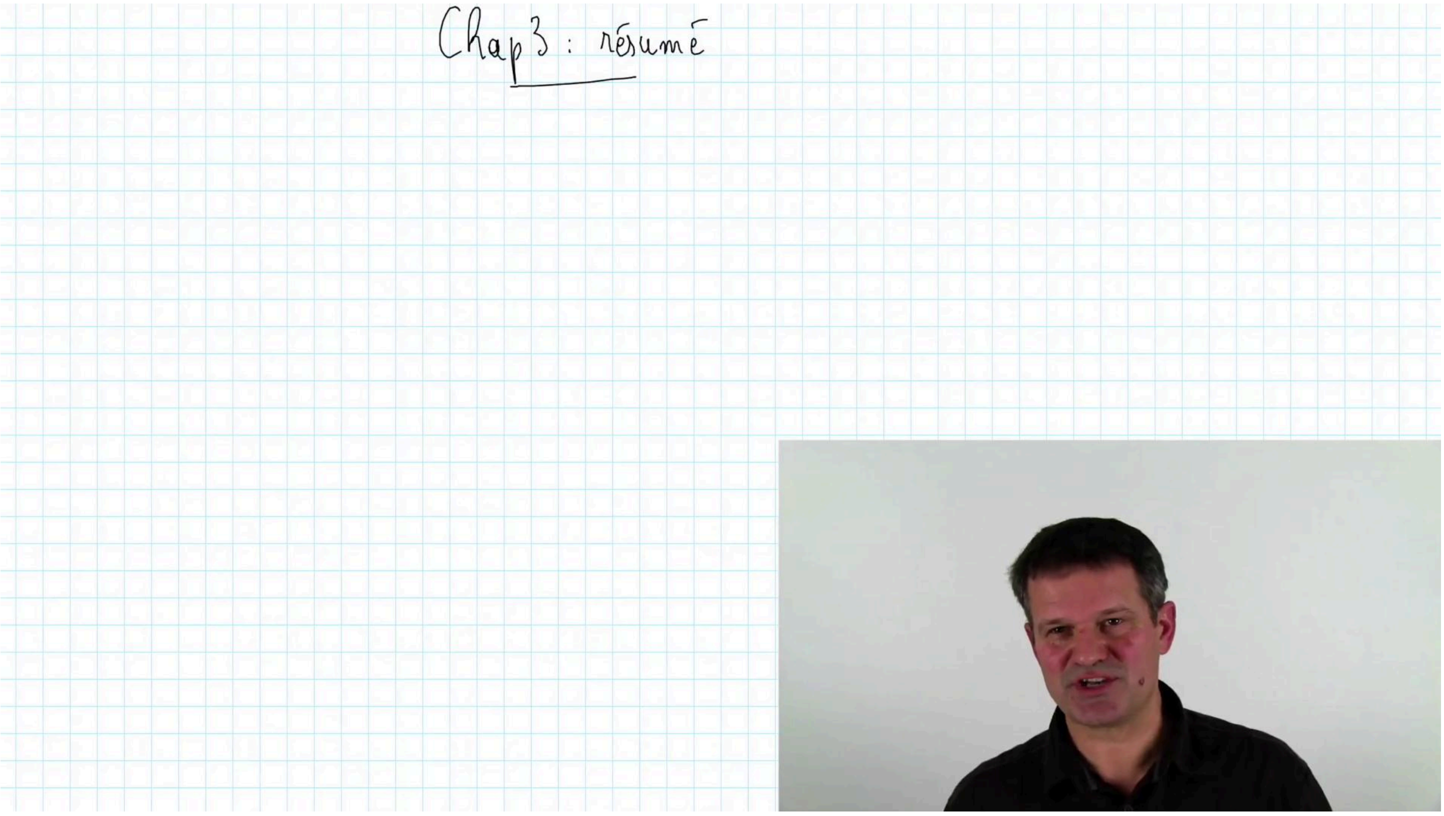

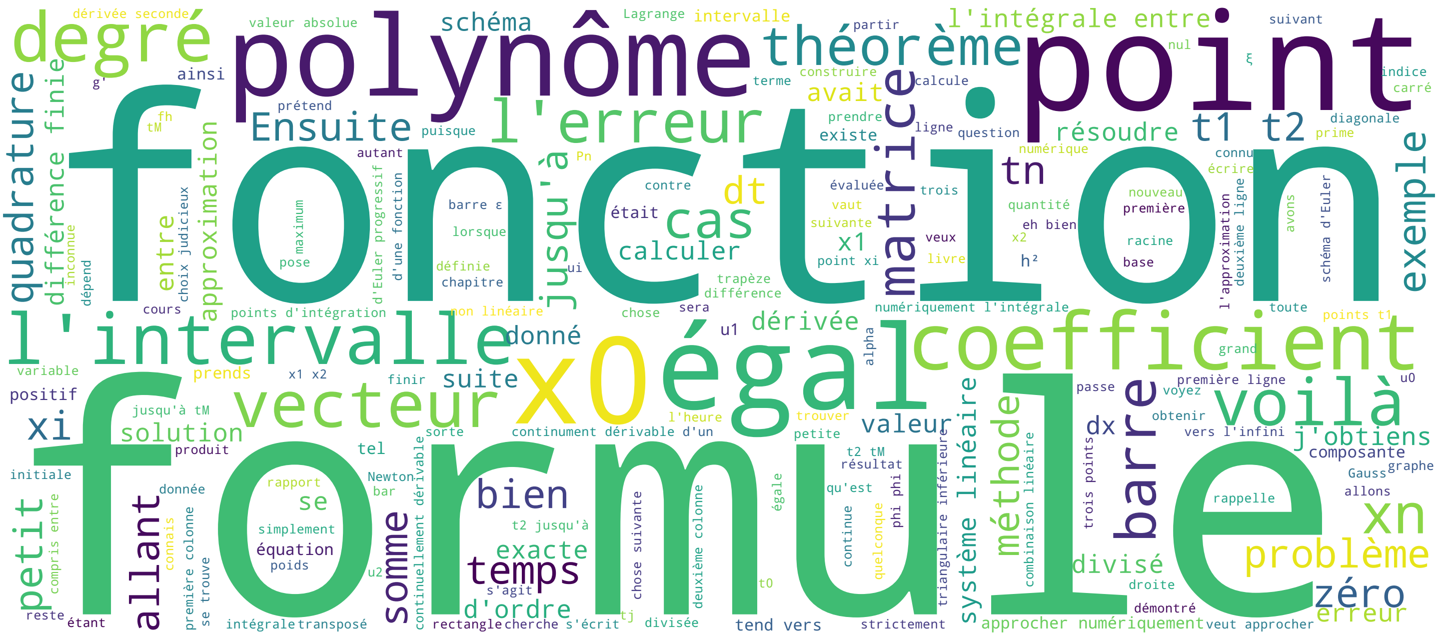

Search MOOC

Video

Chap 3 : résumé

- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont $\int_a^b f(x)dx$ $h = (b-a)/N$
- $\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{-1}^{1} f(x_i + h\frac{t+1}{2})dt$
- $J(g) = \omega_1 g(t_1) + \omega_2 g(t_2) + \dots + \omega_M g(t_M)$ appr. $\int_{-1}^{1} g(t)$.

Voilà un résumé du chapitre trois qui était probablement le plus difficile du cours. Donc on veut approcher numériquement, on se donne une fonction f, définie sur l'intervalle [a,b] dans R, qui est continue et on veut approcher numériquement l'intégrale entre a et b de f(x)dx. Alors qu'est-ce qu'on a fait ? On a coupé l'intervalle [a,b] en sous-intervalles xi, xi +1 et on a démontré que l'intervalle entre a et b de f(x)dx pouvait s'écrire comme une somme, donc il y avait h/2, ici h c'est (b-a)/ N, donc c'est une somme sur les intervalles, i allant de 0 à N-1. Donc il y a ici des intégrales entre -1 et 1, donc on a fait un changement de variables pour se ramener sur l'intervalle -1, 1. La fonction f évaluée en (xi+h fois (t+1)/2)dt. Ensuite, on se donne une formule de quadrature J(g) pour approcher numériquement l'intégrale entre -1 et 1 d'une fonction g(t)dt. Alors, J(g) c'est ω1 g(t1) + ω2 g (t2) + ωM g (tM). Quand je dis que je me donne une formule de quadrature, je me donne des points d'intégration t1, t2 jusqu'à tM et je me donne des poids correspondants, ω1, ω2 jusqu'à ωM. Et donc cette formule de quadrature est là pour approcher numériquement l'intégrale entre -1 et 1 de *g(t)dt*.

Notes

Summary

0m 00s

Chap 3 : résumé

- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont $\int_a^b f(x)dx$ $h = (b-a)/N$
- $\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{-1}^{1} f(x_i + h\frac{t+1}{2})dt$
- $J(g) = \omega_1 g(t_1) + \omega_2 g(t_2) + \dots + \omega_M g(t_M)$ appr. $\int_{-1}^{1} g(t)dt$
- $L_h(f) = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{M} \omega_j f(x_i + h\frac{t_j+1}{2})$
- thm 3.1 : $\int_{-1}^{1} p(t)dt = J(p)$ $\forall p \in \mathbb{P}_r$ $\left|\int_a^b f(x)dx - L_h(f)\right| = O(h^{r+1})$ $f \in C^{r+1}[a,b]$
- thm 3.2. $t_1 t_2 \dots t_M$ dom

Donc avec cette formule de quadrature, j'obtiens une approximation. Je l'applique à cette fonction-là et j'obtiens une approximation que je vais noter Lh(f), qui était égale à h/2, somme sur les intervalles, i allant de 0 à N-1, somme sur les points et les poids, J allant de 1 jusqu'à M, les poids ωJ, la fonction f évaluée en xi + h (tJ +1)/2. Ensuite, il y avait un théorème, qui était le théorème 3.1, qui me disait la chose suivante : si la formule de quadrature était exacte pour les polynômes de degré R, donc supposons que la formule de quadrature est exacte pour les polynômes de degré R. Donc intégrale de -1 à 1, p(t)dt=J(p), c'est-à-dire la somme des ωJ, p en tJ pour tout p, polynôme de degré R. Donc si ceci est vrai, alors l'erreur que je fais lorsque j'approche l'intégrale entre a et b de f(x)dx par cette formule Lh(f), cette erreur est d'ordre h^R+1, pour autant que f soit suffisament régulière, c'est-à-dire R plus une fois continument dérivable sur l'intervalle [a,b]. Ensuite, le théorème 3.2 me dit la chose suivante : c'est-à-dire que si les points sont donnés, donc t1, t2, tM, les points d'intégration sur l'intervalle -1, 1, s'ils sont donnés.

Notes

Summary

1m 51s

Chap3 : résumé

- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont $\int_a^b f(x)dx$ $\qquad h = (b-a)/N$
- $\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{-1}^{1} f(x_i + h \frac{t+1}{2}) dt$
- $J(g) = \omega_1 g(t_1) + \omega_2 g(t_2) + \dots + \omega_M g(t_M)$ appr. $\int_{-1}^{1} g(t)dt$
- $L_h(f) = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{M} \omega_j f(x_i + h \frac{t_j+1}{2})$
- thm 3.1 : $\int_{-1}^{1} p(t)dt = J(p) \ \forall p \in \mathbb{P}_r$ $\qquad \left| \int_a^b f(x)dx - L_h(f) \right| = O(h^{r+1})$ $\quad f \in \mathcal{C}^{r+1}[a,b]$
- thm 3.2. $t_1 t_2 \dots t_M$ donnés $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_M$ base de Lagr de $\mathbb{P}_{M-1}$ ass. $t_1 t_2 \dots t_M$ $\qquad \omega_j = \int_{-1}^{1} \varphi_j(t)dt \quad j = 1, \dots, M$

  $\int_{-1}^{1} p(t)dt = J(p) \ \forall p \in \mathbb{P}_{M-1}$ $\qquad \left| \int_a^b f(x) - L_h(f) \right| = O(h^M)$ $\quad f \in \mathcal{C}^M[a,b]$
- $t_1 t_2 \dots t_M$ zéros polyn Gauss-leg.

  $\int_{-1}^{1} p(t)dt = J(p) \ \forall p \in \mathbb{P}_{2M-1}$ $\qquad \left| \int_a^b f(x)dx - L_h(f) \right|$

Donc avec ces points-là, je peux construire les fonctions φ1, φ2 jusqu'à φM, qui sont les fonctions de la base de Lagrange de pM-1, associé à ces points t1, t2 jusqu'à tM. Si les points t1, t2, tM sont donnés, je propose d'utiliser la formule suivante, ωJ = l'intégrale de -1 à 1 de φJ(t)dt, pour tous les J allant de 1 jusqu'à M. Dans ce cas-là, je prétends que la formule de quadrature sera exacte pour tous les polynômes de degré M-1. Et par conséquent, si la fonction f est suffisamment régulière, l'erreur que je vais faire avec cette formule-là sera une erreur en O(h^M),donc si f est C^M fois continument dérivable sur l'intervalle [a,b]. Et maintenant, il se trouve qu'il existe un choix judicieux des points t1, t2, tM. Donc si t1, t2 jusqu'à tM sont les zéros du polynôme de Gauss-Legendre, donc c'est un choix judicieux, il se trouve que, à ce moment-là, la formule de quadrature est exacte pour les polynômes de degré 2M-1, et non plus M-1. Donc on passe de M-1 à 2M-1 en choisissant judicieusement ces points, de sorte que l'erreur que je fais, l'intégrale a, b de f(x)dx, moins cette approximation Lh(f), qui est définie par cette formule.

Notes

Summary

3m 43s

Chap 3 : résumé

- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont $\int_a^b f(x)\,dx$ $\qquad h = (b-a)/N$
- $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{-1}^{1} f\left(x_i + h\,\frac{t+1}{2}\right) dt$
- $J(g) = w_1\, g(t_1) + w_2\, g(t_2) + \dots + w_M\, g(t_M)$ appr. $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$
- $L_h(f) = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{M} w_j\, f\left(x_i + h\,\frac{t_j+1}{2}\right)$
- thm 3.1 : $\int_{-1}^{1} p(t)\,dt = J(p) \;\; \forall p \in \mathbb{P}_r$ $\quad \left| \int_a^b f(x)\,dx - L_h(f) \right| = O(h^{r+1})$ $\quad f \in C^{r+1}[a,b]$
- thm 3.2. $t_1 t_2 \dots t_M$ donnés $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_M$ base de lagr de $\mathbb{P}_{M-1}$ ass. $t_1 t_2 \dots t_M$ $\quad w_j = \int_{-1}^{1} \varphi_j(t)\,dt \;\; j = 1, \dots, M$

  $\int_{-1}^{1} p(t)\,dt = J(p) \;\; \forall p \in \mathbb{P}_{M-1}$ $\quad \left| \int_a^b f(x) - L_h(f) \right| = O(h^M)$ $\quad f \in C^M[a,b]$
- $t_1 t_2 \dots t_M$ zéros polyn Gauss-leg.

  $\int_{-1}^{1} p(t)\,dt = J(p) \;\; \forall p \in \mathbb{P}_{2M-1}$ $\quad \left| \int_a^b f(x)\,dx - L_h(f) \right| = O(h^{2M})$ $\quad f \in C^{2M}[a,b]$
- Ex : trap, rect $O(h^2)$ Simpson $O(h^4)$ Gauss 2 $O(h^4)$

Cette erreur, cette fois-ci, est en O(h2^M), pour autant que f soit 2 M fois continuellement dérivable sur l'intervalle [a,b]. Donc, exemple que j'ai traité tout au long du cours. Il y avait la formule du trapèze, la formule du rectangle, qui étaient des formules qui, pour finir, étaient des formules d'ordre en O(h²). Il y avait la formule de Simpson, qui était une formule à trois points, qui était en O(h^4). Et, pour finir, il y avait la formule, par exemple, de Gauss à deux points. Donc les deux points étaient -a sur racine de 3, a sur racine de 3, qui, elle aussi, était une formule en O(h^4).

Notes

Summary

5m 53s