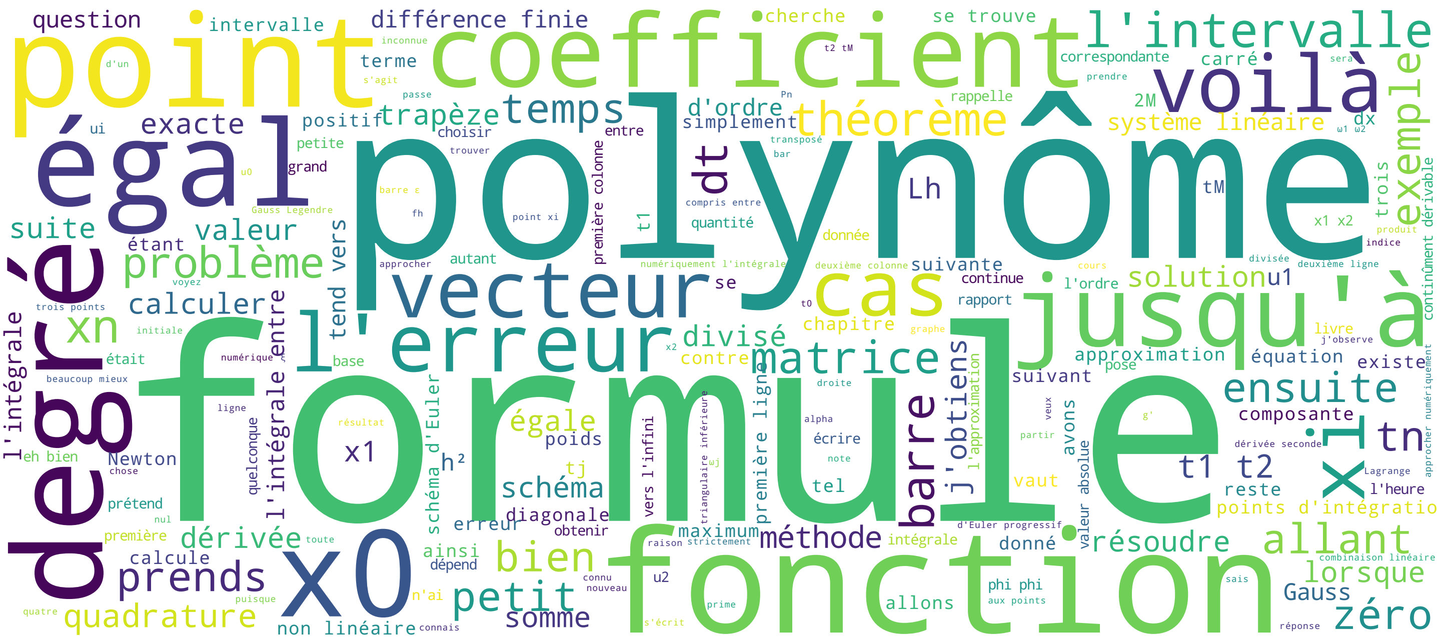


Search MOOC

Video

Chap. 3 : points d'intégration - formules de Gauss

- Soit une formule de quadr. $J(g) = \sum_{j=1}^{M} w_j\, g(t_j)$ appr $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$
- $w_j = \int_{-1}^{1} \varphi_j(t)\,dt \quad j = 1, \dots, M$
- Thm 3.2 $\int_{-1}^{1} p(t)\,dt = J(p) \quad \forall p \in \mathbb{P}_{M-1}$
- Existe-t-il un choix judicieux de $t_1 t_2 \dots t_M$?
-

Il me reste maintenant à parler des points d'intégration, ce qui va m'amener à la présentation des formules de Gauss. Donc, je me donne une formule de quadrature, « Soit une formule de quadrature », que je note *J(g)*, donc somme sur *j* allant de 1 à *M* des poids *ωj* et des points *tj*, toujours pour approcher numériquement l'intégrale de -1 à 1 de *g(t) dt*. Donc, les poids sont donnés par la formule du théorème 3.2, donc intégrale de -1 à 1 de *φj(t) dt*, les fonctions *φ1*, *φ2*, *φM* étant les fonctions de la base de Lagrange de *PM -1* associées aux points *t1*, *t2*, *tM*, donc *j* allant de 1 jusqu'à *M*. Donc, je sais d'après le théorème 3.2 que la formule de quadrature ainsi construite est exacte pour les polynômes de degré *M - 1*, donc l'intégrale de -1 à 1 de *p(t) dt* est égale à *J(p)* pour tout *p* polynôme de degré *M - 1*. Et la question que je me pose maintenant, c'est existe-t-il un choix judicieux, un choix particulier de ces points d'intégration *t1*, *t2*, jusqu'à *tM*, un choix meilleur que les autres ? Et la réponse est oui, ce sont les formules de Gauss.

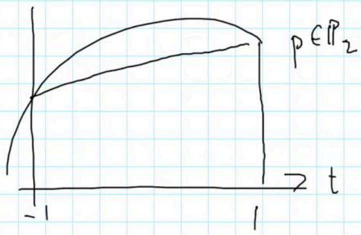
Notes

Summary

0m 00s

Chap. 3 : points d'intégration - formules de Gauss

- Soit une formule de quadr. $J(g) = \sum_{j=1}^{M} w_j \, g(t_j)$ appr $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$
- $w_j = \int_{-1}^{1} \varphi_j(t)\,dt \quad j = 1, \dots, M$
- thm 3.2 $\int_{-1}^{1} p(t)\,dt = J(p) \quad \forall p \in \mathbb{P}_{M-1}$
- Existe-t-il un choix judicieux de $t_1 t_2 \dots t_M$?
- $M = 2 \quad t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad w_1 = w_2 = 1 \quad J(g) = g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \int_{-1}^{1} p(t)\,dt = J(p) \ \forall p \in \mathbb{P}_1$ (thm 3.2)



Donc, dans le cas *M = 2*, je vais choisir comme point d'intégration, donc la formule du trapèze c'était [-1, 1], *t1 = -1, t2 = 1*, ici je vais choisir *-1/√3, t2 = 1/√3*. Je calcule les poids *ω1, ω2* avec la formule du théorème 3.2, et j'obtiens *ω1 = ω2 = 1*. Donc la formule de quadrature, c'est *J(g) = g(-1/√3) + g(1/√3)*. Alors, je sais par construction que cette formule est exacte pour les polynômes de degré 1. Donc l'intégrale de -1 à 1 de *p(t) dt* est égale à *J(p)* pour tout *p* polynôme de degré 1, ça c'est une conséquence du théorème 3.2. Maintenant, en fait il se trouve que c'est beaucoup mieux que ça, donc, faisons un dessin, voilà *t*, donc -1 et 1, choisissons ici *p* un polynôme de degré 2, alors, je vois tout de suite que si je prend la formule du trapèze, je fais une certaine erreur, si je prends *p* un polynôme de degré 2, je n'ai plus *J(p)* égal intégrale de -1 à 1 *p(t) dt* lorsque je prends la formule du trapèze, par contre pour cette formule-là, ça va se passer beaucoup mieux. Pourquoi ?

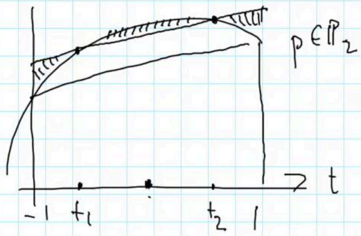
Notes

Summary

1m 48s

Chap. 3 : points d'intégration - formules de Gauss

- Soit une formule de quadr. $J(g) = \sum_{j=1}^{M} w_j\, g(t_j)$ appr $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$
- $w_j = \int_{-1}^{1} \varphi_j(t)\,dt \qquad j = 1, \dots, M$
- Thm 3.2 $\int_{-1}^{1} p(t)\,dt = J(p) \quad \forall p \in \mathbb{P}_{M-1}$
- Existe-t-il un choix judicieux de $t_1 t_2 \dots t_M$?
- $M = 2 \quad t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad w_1 = w_2 = 1 \quad J(g) = g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \int_{-1}^{1} p(t)\,dt = J(p) \ \forall p \in \mathbb{P}_1$ (thm 3.2)



$$\int_{-1}^{1} p(t)\,dt = J(p) \quad \forall p \in \mathbb{P}_2$$

$$\int_{-1}^{1} p(t)\,dt = J(p) \quad \forall p \in \mathbb{P}_3$$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - L_h(f) \right| = O(h^4) \qquad f \in \mathcal{C}^4[a,b]$$

$$L_h(f) = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i + h\,\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{2}\right) + f\left(x_i + h\,\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{2}\right)$$

Parce que mes points d'intégration c'est *-1/√3* et *1/√3*, donc *-0,577* et *0,577* et donc si maintenant je prends les valeurs correspondantes, et bien ce que j'observe c'est que l'erreur que je fais ici est compensée par l'erreur que je fais là. Et donc, dans ce cas-là, l'intégrale de -1 à 1 de *p(t) dt* est égale à *J(p)* pour tout *p* polynôme de degré 2. Il se trouve que c'est même encore mieux que ça, c'est aussi vrai pour les polynômes de degré 3 pour des raisons de symétrie. Donc l'intégrale de -1 à 1 de *p(t) dt*, c'est égal à *J(p)* pour tout *p* polynôme de degré 3. Et donc, lorsque je regarde la différence entre l'intégrale entre *a* et *b* de *f(x) dx* et la formule *Lh(f)* correspondante, j'ai non pas un *O(h²)*, comme dans le cas de la formule trapèze, mais j'ai un un *O(h⁴)*, bien sûr pour autant que *f* soit 4 fois continûment dérivable sur l'intervalle [a, b]. Maintenant quelle est la formule? - je n'ai pas encore explicité ici la formule *Lh(f)* - donc ici la formule *Lh(f)* correspondante, c'est *h/2* somme sur les intervalles *i* allant de 0 à *n - 1*, et vous devez évaluer *f* en *xi + h* fois *t1*, c'est-à-dire *-1/√3*, plus *1/2*, ensuite *f* en *xi + h* fois *1/√3 + 1/2*.

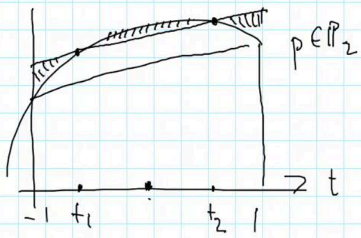
Notes

Summary

3m 20s

Chap. 3 : points d'intégration - formules de Gauss

- Soit une formule de quadr. $J(g) = \sum_{j=1}^{M} w_j \, g(t_j)$ appr $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$
- $w_j = \int_{-1}^{1} \varphi_j(t)\,dt \quad j = 1, \dots, M$
- thm 3.2 $\int_{-1}^{1} p(t)\,dt = J(p) \quad \forall p \in \mathbb{P}_{M-1}$
- Existe-t-il un choix judicieux de $t_1 t_2 \dots t_M$?
- $M = 2$ $\quad t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad w_1 = w_2 = 1$ $\quad J(g) = g(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + g(\frac{1}{\sqrt{3}})$ $\quad \int_{-1}^{1} p(t)\,dt = J(p) \ \forall p \in \mathbb{P}_1$ (thm 3.2)



$$\int_{-1}^{1} p(t)\,dt = J(p) \quad \forall p \in \mathbb{P}_2$$
$$\int_{-1}^{1} p(t)\,dt = J(p) \quad \forall p \in \mathbb{P}_3$$
$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - L_h(f) \right| = O(h^4) \qquad f \in \mathcal{C}^4[a,b]$$
$$L_h(f) = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left(f\left(x_i + h \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{2}\right) + f\left(x_i + h \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{2}\right) \right)$$

- M qque $t_1 t_2 \dots t_M$ zéros du polyn. Gauss-Legendre L_M $\quad \int_{-1}^{1} p(t)\,dt = J(p) \ \forall p \in \mathbb{P}_{2M-1}$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - L_h(f) \right| = O(h^{2M}) \qquad f \in \mathcal{C}^{2M}[a,b]$$

Donc voilà la formule *Lh(f)* correspondante. Et de manière générale, on peut généraliser ceci pour *M* quelconque. Donc si je prends *t1*, *t2* jusqu'à *tM*, comme étant les zéros du polynôme de Gauss-Legendre, alors il y a exactement *M0* sur l'intervalle [-1, 1], donc du polynôme de Gauss-Legendre de degré *LM*, à définir, et bien j'obtiens le résultat général qui est l'intégrale, donc la formule de quadrature est exacte pour les polynômes de degré *2M - 1*. Donc l'intégrale de -1 à 1 de *p(t) dt = J(p)* pour tout *p* polynôme de degré *2M - 1*, donc pour *M = 2*, ça nous faisait un polynôme de degré 3, ici. Et donc, l'erreur que je fais, l'intégrale entre *a* et *b* de *f(x) dx* moins *Lh(f)*, la formule d'approximation correspondante, cette erreur est d'ordre *h^2M* pour autant que *f* soit *2M* fois continûment dérivable, sur l'intervalle [a, b]. Donc en fait, par rapport à une formule conventionnelle, on double l'ordre de convergence, donc par exemple pour la formule du trapèze, on a l'ordre 2, et ici pour la formule de Gauss à 2 points, on a l'ordre 4, tout simplement en choisissant ces points magiques *t1, t2*, *-1/√3* et *1/√3*.

Notes

Summary

5m 26s