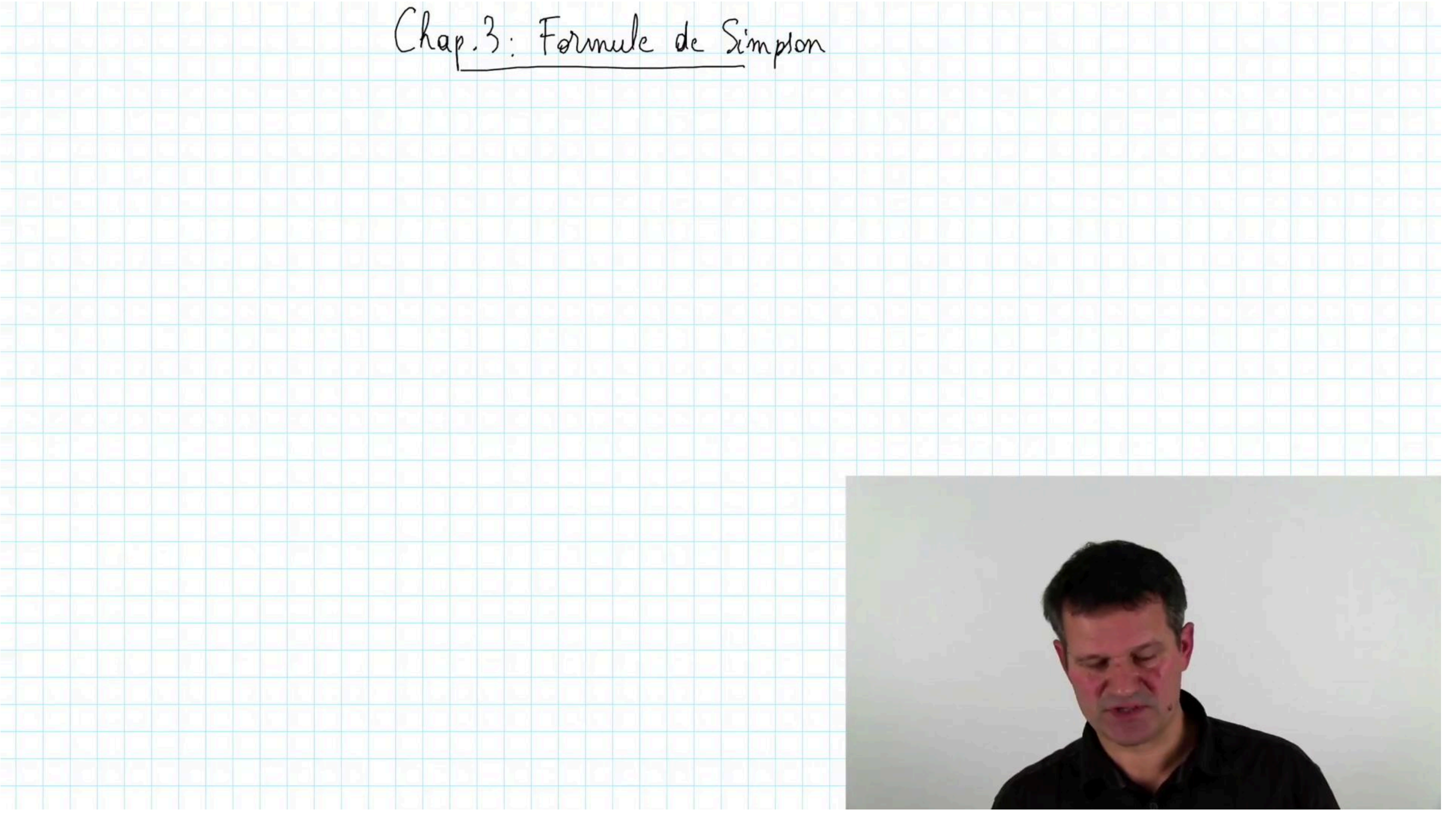
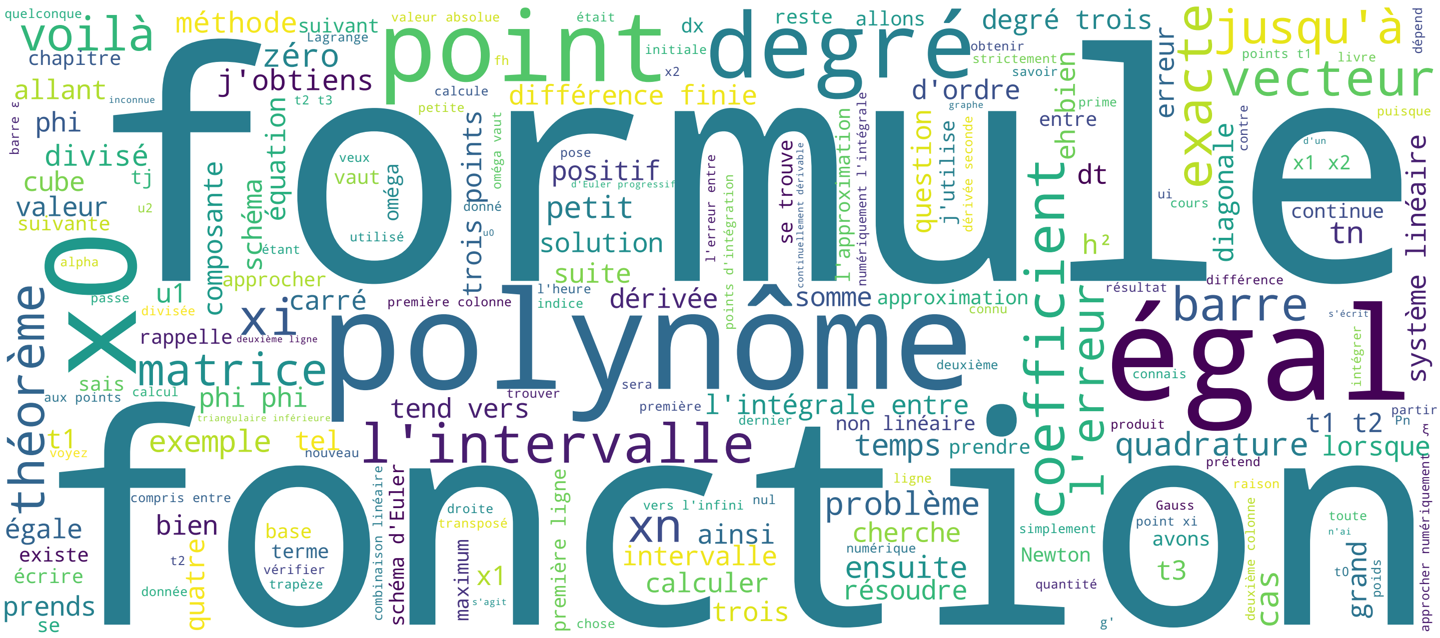
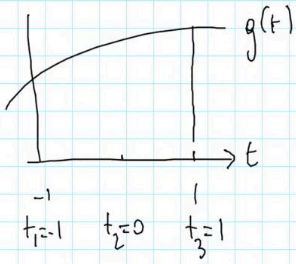




Search MOOC

Video

Chap. 3 : Formule de Simpson



$$J(g) = \omega_1\, g(-1) + \omega_2\, g(0) + \omega_3\, g(1)$$

Thm 3.2 $\quad \omega_j = -\int_{-1}^{1} \varphi_j(t)\,dt \quad j = 1, 2, 3$

$$\varphi_1(t) = \frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} = \frac{t\,(t-1)}{(-1)(-1-1)} = \frac{t\,(t-1)}{2} \qquad \omega_1 = \int_{-1}^{1} \varphi_1(t)\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{t^2-t}{2}\,dt$$

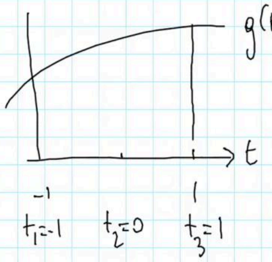
Donc la formule de Simpson est une formule à trois points. Donc je vous rappelle que je cherche à approcher t varie sur l'intervalle moins un, un. Je cherche à approcher l'intégrale de la fonction g sur l'intervalle moins un, un. Et on utilise ici trois points. Donc t1= -1, le premier point. Le deuxième point, t2 =0 Et le troisième point, t3=1 Donc J(g), la formule de quadrature, c'est oméga 1 g(-1), + oméga 2 g (0) + oméga 3 g(1). J'utilise maintenant le théorème 3.2 qui me dit que les poids oméga j sont égaux à l'intégrale entre -1 et 1 de phi j de t dt, j égal un, deux, trois. Donc, par exemple, pour j=1 phi 1(t), donc phi 1, phi 2, phi 3 c'est la base de Lagrange des polynômes de degré deux associés aux points t1, t2, t3. Donc phi 1 de t c'est le polynôme de degré deux qui s'annule en t2 et en t3, et qui vaut un en t1. Donc ici, t1 moins t2 et t1 moins t3. C'est donc t fois t -1, divisé par moins 1 moins 0, et ici, moins 1 moins 1. C'est donc t fois t moins 1, sur 2. Et je dois intégrer cette fonction sur l'intervalle moins un, un. Donc doit intégrer entre moins un, un, t carré moins t, sur deux. Alors la fonction t étant impaire sur l'intervalle moins un, un, l'intégrale donne zéro.

Notes

Summary

0m 00s

Chap. 3 : Formule de Simpson



$$J(g) = \omega_1\, g(-1) + \omega_2\, g(0) + \omega_3\, g(1)$$

Thm 3.2 $\qquad \omega_j = -\int_{-1}^{1} \varphi_j(t)\,dt \qquad j=1,2,3$

$$\varphi_1(t) = \frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} = \frac{t\,(t-1)}{(-1)(-1-1)} = \frac{t(t-1)}{2} \qquad \omega_1 = \int_{-1}^{1}\varphi_1(t)\,dt = \int_{-1}^{1}\frac{t^2-t}{2}\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{t^2}{2}dt = \frac{1}{3}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{3} \quad \omega_3 = \frac{1}{3} \quad \omega_2 = \frac{4}{3} \qquad J(g) = \frac{1}{3}g(-1) + \frac{4}{3}g(0) + \frac{1}{3}g(1)$$

$$L_h(f) = \frac{h}{6}\sum_{i=0}^{N-1}\left(f(x_i) + 4f(x_i+\tfrac{h}{2}) + f(x_{i+1})\right)$$

$$\int_{-1}^{1} p(t)\,dt = J(p) \qquad \forall p \in \mathbb{P}_2$$

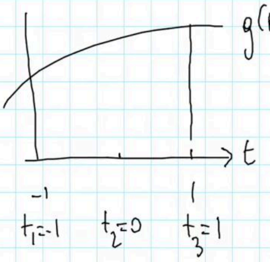
Il me reste donc à intégrer sur moins un, un, t carré sur deux dt, et j'obtiens 1/3. Donc oméga 1 vaut 1/3. Pour des raisons de symétrie, oméga 3 vaut aussi 1/3. On peut aussi faire le calcul. Et maintenant j'utilise le fait que la somme des poids vaut deux, c'est la longueur de l'intervalle moins un, un, pour en déduire que oméga 2, le dernier des poids à considérer, vaut 4/3. Donc pour finir ma formule composite, j de g est égal à 1/3 g en -1, plus 4/3 g en 0, plus 1/3 g en 1. La formule Lh de f pour approcher numériquement l'intégrale entre a et b de f de x dx vaut maintenant h, sur deux fois trois six, fois la somme sur tous les intervalles, i allant de zéro à grand N moins un, je dois prendre f en xi, plus quatre, le quatre qui est ici, f en xi plus h sur deux, plus f en xi plus un. Maintenant la formule de quadrature est exacte pour les polynômes de degré deux, puisque j'utilise maintenant le théorème 3.2, donc je sais que la formule de quadrature est exacte pour les polynômes de degré deux. L'intégrale de moins un à un de p de t dt est égale à j de p, qui est définie par la formule suivante, donc j de p c'est 1/3 p en -1, plus 4/3 p en 0, plus 1/3 p en 1, pour tout polynôme de degré deux.

Notes

Summary

2m 12s

Chap. 3 : Formule de Simpson



$$J(g) = w_1\, g(-1) + w_2\, g(0) + w_3\, g(1)$$

Thm 3.2 $\quad w_j = +\int_{-1}^{1} \varphi_j(t)\,dt \quad j=1,2,3$

$$\varphi_1(t) = \frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} = \frac{t\,(t-1)}{(-1)(-1-1)} = \frac{t\,(t-1)}{2} \qquad w_1 = \int_{-1}^{1} \varphi_1(t)\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{t^2-t}{2}\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{t^2}{2}\,dt = \frac{1}{3}$$

$$w_1 = \frac{1}{3} \quad w_3 = \frac{1}{3} \quad w_2 = \frac{4}{3} \qquad J(g) = \frac{1}{3} g(-1) + \frac{4}{3} g(0) + \frac{1}{3} g(1)$$

$$L_h(f) = \frac{h}{6} \sum_{i=0}^{N-1} \left(f(x_i) + 4 f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + f(x_{i+1}) \right)$$

$$\int_{-1}^{1} p(t)\,dt = J(p) \quad \forall p \in \mathbb{P}_2 \quad (\text{thm } 3.2) \qquad p(t) = t^3 \quad \int_{-1}^{1} t^3\,dt = 0 \qquad J(p) = \frac{1}{3}(-1)^3 + \frac{4}{3}0^3 + \frac{1}{3}1^3 = 0$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad} \quad \forall p \in \mathbb{P}_3$$

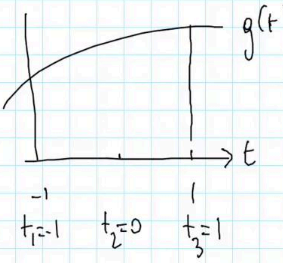
Donc ça c'est parce que j'ai utilisé la formule du théorème 3.2. J'ai trois points, t1, t2, t3, la formule est exacte pour les polynômes de degré deux. Maintenant je me pose la question de savoir est-ce que la formule est exacte pour les polynômes de degré trois ? Donc je sais que la formule est exacte pour les polynômes de degré deux. Pour vérifier si elle est exacte pour les polynômes de degré trois, il suffit que j'essaie avec p(t)=t au cube. Donc je calcule l'intégrale entre moins un et un de t3 dt et j'obtiens-- Donc t3 est une fonction impaire que j'intègre sur moins un, un et j'obtiens zéro. Et j de p, avec p de t égal t cube, eh bien, j'applique la formule. Donc vous avez moins 1/3 moins 1 au cube, plus 4/3 fois 0 au cube, plus 1/3 fois 1 au cube, et j'obtiens aussi 0. Donc la formule de quadrature est exacte, donc j'en déduis que la formule de quadrature est exacte pour tous les polynômes p de degré trois. Alors je pourrais essayer avec p (t)= t ^4 et je pourrais vérifier que ce n'est pas vrai pour les polynômes de degré quatre. Donc la formule de quadrature est exacte pour les polynômes de degré trois. Elle est exacte pour les polynômes de degré deux par construction parce que j'ai utilisé la formule du théorème, ici, 3.2.

Notes

Summary

4m 12s

Chap. 3: Formule de Simpson



$J(g) = w_1\, g(-1) + w_2\, g(0) + w_3\, g(1)$

Thm 3.2 $\quad w_j = +\int_{-1}^{1} \varphi_j(t)\,dt \quad j=1,2,3$

$\varphi_1(t) = \frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} = \frac{t\,(t-1)}{(-1)(-1-1)} = \frac{t\,(t-1)}{2} \qquad w_1 = \int_{-1}^{1} \varphi_1(t)\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{t^2-t}{2}\,dt$

$= \int_{-1}^{1} \frac{t^2}{2}\,dt = \frac{1}{3}$

$w_1 = \frac{1}{3} \quad w_3 = \frac{1}{3} \quad w_2 = \frac{4}{3} \qquad J(g) = \frac{1}{3} g(-1) + \frac{4}{3} g(0) + \frac{1}{3} g(1)$

$L_h(f) = \frac{h}{6} \sum_{i=0}^{N-1} \left(f(x_i) + 4 f(x_i + \frac{h}{2}) + f(x_{i+1}) \right)$

$\int_{-1}^{1} p(t)\,dt = J(p) \quad \forall p \in \mathbb{P}_2$ (thm 3.2) $\qquad p(t) = t^3 \quad \int_{-1}^{1} t^3\,dt = 0 \qquad J(p) = \frac{1}{3}(-1)^3 + \frac{4}{3}\, 0^3 + \frac{1}{3}\, 1^3 = 0$

$\forall p \in \mathbb{P}_3$

thm: 3.1 $\quad f \in \mathcal{C}^4[a,b] \quad \left| \int_a^b f(x)\,dx - L_h(f) \right| = O(h^4)$

Et il se trouve que pour des raisons de symétrie, elle est aussi exacte pour les polynômes de degré trois. Donc je peux maintenant appliquer le théorème 3.1 qui me dit que si la fonction f est quatre fois continuellement dérivable sur l'intervalle a, b, eh bien, l'erreur entre intégrale a, b f de x dx et l'approximation Lh de f, que je n'ai pas encore, qui est ici pardon, voilà Lh de f, eh bien, cette erreur est en O de h quatre, c'est-à-dire que l'erreur est divisée par deux puissance quatre, c'est-à-dire 16, chaque fois que h est divisé par deux.

Notes

Summary

5m 53s