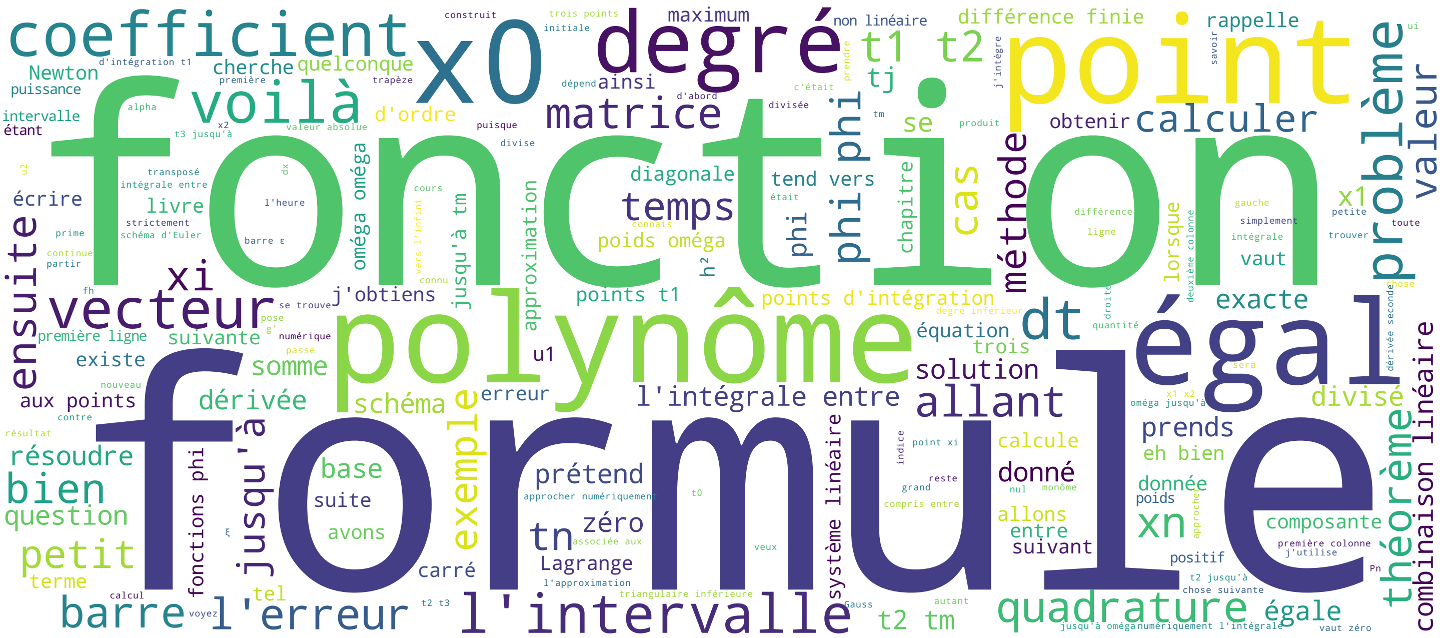

Search MOOC

Video

EPFL

Chap. 3 : poids d'une formule de quadrature

- Soit $J(g) = \sum_{j=1}^{M} \omega_j g(t_j)$ une formule de quadrature pour approcher num. $\int_{-1}^{1} g(t)dt$
- $t_1, t_2, \dots, t_M$ donnés, calcul de $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_M$?
- Idée : Soit $p \in \mathbb{P}_{M-1}$. D'après le chap. 1 on a $p(t) =$ $\varphi_1(t)$ $\varphi_2(t)$ $\varphi_M(t)$

  $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_M$ est la base de Lagrange de $\mathbb{P}_{M-1}$ associée aux pts $t_1 t_2 \dots t_M$.

Venons maintenant au problème du calcul des poids d'une formule de quadrature. Donc, soit j de g qui est la somme de j allant de un à m des oméga j, g en tj, une formule de quadrature, quadrature pour approcher numériquement l'intégrale entre moins un et un de g de t dt. Donc quand je dis que je me donne une formule de quadrature, ça veut simplement dire que je me donne des points d'intégration t1, t2, tm. J'évalue cette fonction en ces points t1, t2, tm. Et je me donne des poids oméga 1, oméga 2, oméga m. Je fais la combinaison linéaire de ces valeurs et je cherche à approcher l'intégrale moins un à un de g de t dt. Donc la question que je me pose maintenant, c'est : t1, t2, tm, les points sont donnés et comment calculer les poids oméga 1, oméga 2 jusqu'à oméga m ? Alors l'idée est la suivante : L'idée, avant d'énoncer la formule, l'idée est la suivante : je prends soit p, un polynôme de degré inférieur ou égal à m-1 quelconque. Donc d'après le chapitre un, chapitre un : interpolation, je prétends que p(t) peut s'écrire comme combinaison linéaire des fonctions phi 1 de t, phi 2 de t, phi m de t, où phi 1, phi 2, phi m, phi 1, phi 2, trois petits points jusqu'à phi m, est la base de Lagrange des polynômes de degré inférieur ou égal à m-1, p m-1, associée aux points, les points d'intégration t1, t2, jusqu'à tm.

Notes

Summary

0m 00s

Chap. 3 : poids d'une formule de quadrature

- Soit $J(g) = \sum_{j=1}^{M} w_j \, g(t_j)$ une formule de quadrature pour approcher num. $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$
- $t_1, t_2, \ldots, t_M$ donnés, calcul de $w_1 w_2 \ldots w_M$?
- Idée : Soit $p \in \mathbb{P}_{M-1}$. D'après le chap. 1 on a $p(t) = p(t_1)\,\varphi_1(t) + p(t_2)\,\varphi_2(t) + \ldots + p(t_M)\,\varphi_M(t)$

$\underline{\varphi_1 \, \varphi_2 \ldots \varphi_M}$ est la base de Lagrange de $\mathbb{P}_{M-1}$ associée aux pts $t_1 \, t_2 \ldots t_M$.

$$\varphi_1(t) = \frac{(t-t_2)(t-t_3)\cdots(t-t_M)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)\cdots(t_1-t_M)}$$

Donc

$$\int_{-1}^{1} p(t)\,dt =$$

Donc je prétends à nouveau que p(t) est une combinaison linéaire des fonctions phi 1, phi 2, phi m. Phi 1, phi 2, phi m étant la base de Lagrange de p m-1 associée aux points t1, t2, tm. Donc je vous rappelle que, par exemple, phi 1(t) c'était le polynôme de degré m-1 qui vaut zéro au point t2, t3, jusqu'à tm et qui vaut un au point t1. Donc je divise par t1 moins t2, t1 moins t3, jusqu'à t1 moins tm. Ce polynôme phi 1(t) est bien un polynôme de degré moins un, c'est le produit de monômes, de m moins un monôme et c'est un polynôme qui vaut zéro aux points t2, t3, tm et qui vaut un, phi 1 en t1 vaut un. Donc, nous avions démontré que ces fonctions forment une base des polynômes de degré m moins un et par conséquent, je peux écrire un polynôme de degré m-1 quelconque comme combinaison linéaire de ces fonctions de base. Alors il se trouve que les coefficients de la combinaison linéaire sont donnés par p en t1, p en t2, p en tm. Donc voilà une autre représentation autre que la représentation canonique de p de t. Donc maintenant si j'intègre, si j'utilise cette formule et j'intègre à gauche et à droite sur l'intervalle moins un, un, j'obtiens la chose suivante : donc intégrale entre moins un, un de p (t) dt est égale à...

Notes

Summary

2m 25s

Chap. 3 : poids d'une formule de quadrature

- Soit $J(g) = \sum_{j=1}^{M} w_j \, g(t_j)$ une formule de quadrature pour approcher num. $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$
- $t_1, t_2, \dots, t_M$ donnés, calcul de $w_1 w_2 \dots w_M$?
- Idée : Soit $p \in \mathbb{P}_{M-1}$. D'après le chap. 1 on a $p(t) = p(t_1)\,\varphi_1(t) + p(t_2)\,\varphi_2(t) + \dots + p(t_M)\,\varphi_M(t)$

  $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_M$ est la base de Lagrange de $\mathbb{P}_{M-1}$ associée aux pts $t_1 t_2 \dots t_M$.

$$\varphi_1(t) = \frac{(t-t_2)(t-t_3)\cdots(t-t_M)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)\cdots(t_1-t_M)}$$

Donc

$$\int_{-1}^{1} p(t)\,dt = \sum_{j=1}^{M} p(t_j) \underbrace{\int_{-1}^{1} \varphi_j(t)\,dt}_{w_j}.$$

Donc si $w_j = \int_{-1}^{1} \varphi_j(t)\,dt$ $\int_{-1}^{1} p(t)\,dt = J(p)$ $\forall \mathbb{P}_{M-1}$

- Thm 3.2 : Donnée : M, $t_1, t_2, \dots t_M$, $w_1 w_2 \dots w_M$ $J(g) = \sum_{j=1}^{M} g(t_j) w_j$ pour appr. $\int_{-1}^{1} g(t)$

je vais écrire maintenant somme j allant de 1 à m, donc j'intègre cette expression entre -1 1 et j'obtiens somme j allant de 1 à m de p en tj, ici, fois l'intégrale entre moins un et un de phi j de t dt. Donc si j'appelle maintenant ceci oméga j, j'ai une formule de quadrature et cette formule de quadrature est exacte pour les polynômes de degré m-1. Donc si oméga j égale l'intégrale de moins un, un de phi j de t dt, j'ai construit une formule de quadrature. Intégrale de moins un à un de p de t dt est égale à j de p pour tout polynôme de degré m-1. Donc j'ai construit une formule de quadrature qui est exacte pour les polynômes de degré m-1. Donc je peux maintenant énoncer le résultat, le théorème qui nous permet d'avoir une formule pour obtenir les poids. Donc théorème 3.2 du livre. Donc, on se donne une formule de quadrature, donc les données du problème c'est m, un entier positif, t1, t2, jusqu'à tm, les points d'intégration, oméga 1, oméga 2, jusqu'à oméga m, les poids d'intégration, et on se donne donc une formule de quadrature j(g)= donc somme j allant de 1 à m des g en tj fois oméga j, donc pour approcher numériquement l'intégrale entre moins un et un de g de t dt.

Notes

Summary

4m 21s

Chap. 3 : poids d'une formule de quadrature

- Soit $J(g) = \sum_{j=1}^{M} w_j\, g(t_j)$ une formule de quadrature pour approcher num. $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$
- $t_1, t_2, \dots, t_M$ donnés, calcul de $w_1 w_2 \dots w_M$?
- Idée : Soit $p \in \mathbb{P}_{M-1}$. D'après le chap. 1 on a $p(t) = p(t_1)\,\varphi_1(t) + p(t_2)\,\varphi_2(t) + \dots + p(t_M)\,\varphi_M(t)$

  $\varphi_1\, \varphi_2 \dots \varphi_M$ est la base de Lagrange de $\mathbb{P}_{M-1}$ associée aux pts $t_1\, t_2 \dots t_M$.

  $$\varphi_1(t) = \frac{(t-t_2)(t-t_3)\cdots(t-t_M)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)\cdots(t_1-t_M)}$$

  Donc

  $$\int_{-1}^{1} p(t)\,dt = \sum_{j=1}^{M} p(t_j) \underbrace{\int_{-1}^{1} \varphi_j(t)\,dt}_{w_j}.$$

  Donc si $w_j = \int_{-1}^{1} \varphi_j(t)\,dt$ $\int_{-1}^{1} p(t)\,dt = J(p)$ $\forall \mathbb{P}_{M-1}$

- Thm 3.2 : Donnée : M, $t_1, t_2, \dots t_M$, $w_1 w_2 \dots w_M$ $J(g) = \sum_{j=1}^{M} g(t_j) w_j$ pour appr. $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$

  $$\left(\int_{-1}^{1} p(t)\,dt = J(p) \quad \forall p \in \mathbb{P}_{M-1} \right) \iff \left(w_j = \int_{-1}^{1} \varphi_j(t)\,dt \quad j = 1, \dots, M \right)$$

Alors je prétends la chose suivante : que la formule de quadrature est exacte pour les polynômes de degré m-1. Donc intégrale entre moins un et un de p de t, je prends ici p, un polynôme quelconque de degré m-1, l'intégrale moins un et un de p de t dt est égale à j de p pour tout p, polynôme de degré m-1, si et seulement si les poids oméga j sont donnés par la formule suivante : intégrale de moins un à un de phi j de t dt, donc ça c'est pour tous les j allant de 1 jusqu'à m, où les fonctions phi j, ici, sont les fonctions de la base de Lagrange de p m-1 associées aux points t1, t2 jusqu'à tm. Et donc voilà, nous avons ici une formule pour les poids. Donc, qu'est-ce qu'on va faire maintenant ? Donc interprétation. Donc on se donne des points d'intégration t1, t2, tm dans l'intervalle moins un, un. On calcule des poids oméga j avec la formule intégrale moins un, un, phi j de t dt, j allant de un jusqu'à m. On a une formule Lh de f correspondante et je prétends que l'intégrale entre a et b de f de x dx moins cette approximation correspondante Lh de f, eh bien, cette erreur est d'ordre h à la puissance m pour autant que f soit m fois continuellement dérivable sur l'intervalle a, b.

Notes

Summary

6m 19s

Chap.3 : poids d'une formule de quadrature

- Soit $J(g) = \sum_{j=1}^{M} w_j\, g(t_j)$ une formule de quadrature pour approcher num. $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$
- $t_1, t_2, \dots, t_M$ donnés, calcul de $w_1 w_2 \dots w_M$?
- Idée : Soit $p \in \mathbb{P}_{M-1}$. D'après le chap.1 on a $p(t) = p(t_1)\,\varphi_1(t) + p(t_2)\,\varphi_2(t) + \dots + p(t_M)\,\varphi_M(t)$

  $\varphi_1\, \varphi_2 \dots \varphi_M$ est la base de Lagrange de $\mathbb{P}_{M-1}$ associée aux pts $t_1\, t_2 \dots t_M$.

  $$\varphi_1(t) = \frac{(t-t_2)(t-t_3)\cdots(t-t_M)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)\cdots(t_1-t_M)}$$

  Donc
  $$\int_{-1}^{1} p(t)\,dt = \sum_{j=1}^{M} p(t_j) \underbrace{\int_{-1}^{1} \varphi_j(t)\,dt}_{w_j}.$$
  Donc si $w_j = \int_{-1}^{1} \varphi_j(t)\,dt$ $\quad \int_{-1}^{1} p(t)\,dt = J(p)\ \forall \mathbb{P}_{M-1}$

- Thm 3.2 : Donnée : M, $t_1, t_2, \dots t_M$, $w_1 w_2 \dots w_M$ $\quad J(g) = \sum_{j=1}^{M} g(t_j) w_j$ pour appr. $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$

  $$\left(\int_{-1}^{1} p(t)\,dt = J(p)\ \forall p \in \mathbb{P}_{M-1} \right) \iff \left(w_j = \int_{-1}^{1} \varphi_j(t)\,dt \quad j = 1, \dots, M \right)$$

Donc par conséquent, l'erreur, comme d'habitude, l'erreur est divisée par deux puissance m chaque fois que h est divisé par deux. Donc maintenant nous allons construire grâce à cette formule la formule de Simpson, qui est une formule à trois points. Et ensuite, nous allons nous poser la question de savoir comment existe-il un choix judicieux des points t1, t2, tm. Donc tout d'abord, la formule de Simpson.

Notes

Summary

8m 13s