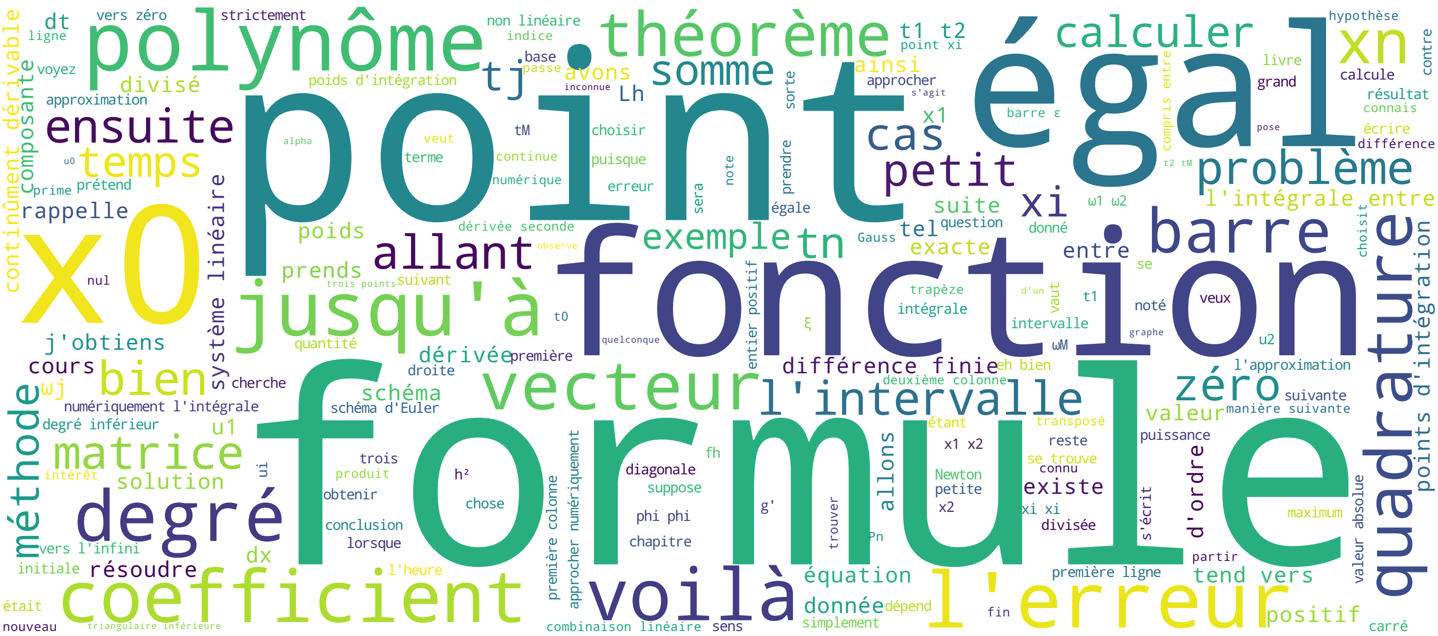
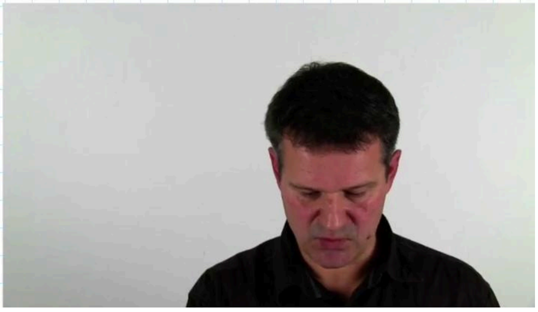


Search MOOC

Video

Chap. 3 : généralités (fin)

Thm 3.1 : Données : $M, t_1, t_2, \dots, t_M$ points $\omega_1\ \omega_2 \dots \omega_M$ poids $J(g) = \sum_{j=1}^{M} \omega_j\, g(t_j)$ approcher num. $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$



Le choix des points d'intégration et des poids d'intégration est dicté par le théorème suivant, c'est le théorème 3.1 du livre. Je vous rappelle les données : nous avons à disposition une formule de quadrature, c'est-à-dire *M* un entier positif, 1,2,3,4,5. des points d'intégration que j'ai noté *t1, t2*, jusqu'à *tM*, des poids d'intégration que j'ai noté *ω1, ω2*, jusqu'à *ωM*, et donc j'ai une formule de quadrature *J(g)*, qui est la somme sur *j* allant de 1 à *M* des poids *ωj* fois *g(tj)*. Et cette formule de quadrature est là pour approcher numériquement l'intégrale de -1 à 1 d'une fonction *g(t) dt*, où *g* est une fonction continue, définie sur l'intervalle [-1, 1]. Ensuite, une fois que je me donne cette formule de quadrature, ceci revient à se donner une formule pour approcher numériquement l'intégrale entre *a* et *b* de *f(x) dx*.

Notes

Summary

0m 01s

Chap. 3 : généralités (fin)

Thm 3.1 : Données : $M, t_1, t_2, \dots, t_M$ points $\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_M$ poids $J(g) = \sum_{j=1}^{M} \omega_j g(t_j)$ approcher num. $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$

$$L_h(f) = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{M} \omega_j f\left(x_i + h\frac{t_j+1}{2}\right) \text{ approx num. de } \int_a^b f(x)\,dx$$

Hypothèses : • la formule de quadrature $J(g)$ est exacte pour les polynômes de degré r

Donc, cette formule je l'ai notée *Lh(f)*, donc si je me donne ces points et ces poids, j'obtiens une formule de quadrature qui s'écrit de la manière suivante : *h/2* somme sur les intervalles [xi, xi + 1], somme *i* allant de zéro à *M - 1*, ensuite vous avez somme sur *j* allant de 1 à *M* qui sont les points et les poids d'intégration, vous avez les poids *ωj*, et vous devez évaluer la fonction *f* en *(xi + h (tj+1)/2)*. Ça, c'est l'approximation numérique de l'intégrale entre *a* et *b* de *f(x) dx*. Voilà les données du problème. Les hypothèses sont les suivantes : « Hypothèses ». Hypothèses du théorème, il y en a deux. La première hypothèse c'est que la formule de quadrature, c'est ce que j'ai noté *J(g)*, c'est-à-dire la somme des *ωj g(tj)*, est exacte pour les polynômes de degré *r*, *r* étant un entier positif.

Notes

Summary

1m 28s

Chap. 3 : généralités (fin)

Thm 3.1 : Données : $M, t_1, t_2, \dots, t_M$ points $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_M$ poids $J(g) = \sum_{j=1}^{M} \omega_j g(t_j)$ approcher num. $\int_{-1}^{1} g(t)dt$

$$L_R(f) = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{M} \omega_j f\left(x_i + h\frac{t_j+1}{2}\right) \text{ approx num. de } \int_a^b f(x)dx$$

Hypothèses : • la formule de quadrature $J(g)$ est exacte pour les polynômes de degré r

$$\int_{-1}^{1} p(t)dt = J(p) = \sum_{j=1}^{M} \omega_j p(t_j) \qquad \forall p \in \mathbb{P}_r$$

• $f \in \mathcal{C}^{r+1}[a,b]$

Ceci veut dire que si je prends *p* un polynôme de degré *r* quelconque, j'avais noté *Pr* au chapitre 1, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à *r*, soit *p* un polynôme de degré inférieur ou égal à *r*, je calcule l'intégrale de -1 à 1 de *p(t) dt*, je le compare avec *J(p)*, qui par définition est somme sur *j* allant de 1 à *M* des *ωj* fois ce polynôme *p(tj)*, et je suppose qu'il y a égalité entre l'intégrale et l'approximation de cette intégrale. Donc, supposons que la formule de quadrature soit exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à *r*. Ensuite, une hypothèse qui est que *f*, je vous rappelle que ce que je veux c'est approcher numériquement l'intégrale entre *a* et *b* de *f(x) dx* par cette formule. Et donc, l'hypothèse que je rajoute c'est que *f* est *r* plus une fois, le *r* qui est ici, c'est le *r* qui est là, donc *f* est *r* plus une fois continûment dérivable sur l'intervalle [a, b].

Notes

Summary

3m 09s

Chap. 3 : généralités (fin)

Thm 3.1 : Données : M, $t_1, t_2, \dots, t_M$ points $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_M$ poids $J(g) = \sum_{j=1}^{M} \omega_j g(t_j)$ approche num. $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$

$$L_h(f) = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{M} \omega_j f\left(x_i + h\frac{t_j+1}{2}\right) \text{ approx num. de } \int_a^b f(x)\,dx$$

Hypothèses : • la formule de quadrature $J(g)$ est exacte pour les polynômes de degré r

$$\int_{-1}^{1} p(t)\,dt = J(p) = \sum_{j=1}^{M} \omega_j p(t_j) \qquad \forall p \in \mathbb{P}_r$$

• $f \in \mathcal{C}^{r+1}[a,b]$

Conclusion : $\forall f \in \mathcal{C}^{r+1}[a,b]\ \exists C > 0\ \forall 0 < h < b-a \quad \left| \int_a^b f(x)\,dx - L_h(f) \right| \leq C h^{r+1}$ (on note $O(h^{r+1})$)

Et la conclusion est la suivante : « Conclusion » Donc, pour toute fonction *f r* plus une fois continûment dérivable sur l'intervalle [a, b], il existe un *C* positif tel que pour tout *h*, *h* c'est le petit paramètre qui tend vers zéro, c'est l'écart qu'il y a entre 2 points consécutifs *xi*, *xi+1*, qui eux, je suppose, sont constants, donc pour tout *h* positif, *h* est plus petit que *b - a*, et est strictement positif, donc pour tout *f*, il existe un *C* tel que pour tout *h*, on a l'intégrale entre *a* et *b* de *f(x) dx - Lh(f)*, *Lh(f)* qui est donné par cette formule-là, et bien ceci est l'erreur, l'erreur est plus petite ou égale à *C h^(r + 1)*. On note ceci comme toujours *O(h^(r + 1))*. Voilà la conclusion du théorème, si les hypothèses sont satisfaites, la formule de quadrature est exacte pour les polynômes de degré *r*, *f* est *r* plus une fois continûment dérivable, alors l'erreur est d'ordre *h^(r + 1)*.

Notes

Summary

4m 26s

Chap. 3 : généralités (fin)

Thm 3.1 : Données : $M, t_1, t_2, \dots, t_M$ points $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_M$ poids $J(g) = \sum_{j=1}^{M} \omega_j g(t_j)$ approcher num. $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$

$$L_h(f) = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{M} \omega_j f\left(x_i + h\frac{t_j+1}{2}\right) \text{ approx num. de } \int_a^b f(x)\,dx$$

Hypothèses : • la formule de quadrature $J(g)$ est exacte pour les polynômes de degré r

$$\int_{-1}^{1} p(t)\,dt = J(p) = \sum_{j=1}^{M} \omega_j p(t_j) \qquad \forall p \in \mathbb{P}_r$$

• $f \in \mathcal{C}^{r+1}[a,b]$

Conclusion : $\forall f \in \mathcal{C}^{r+1}[a,b] \ \exists C>0 \ \forall 0<h<b-a$ $\quad \left| \int_a^b f(x)\,dx - L_h(f) \right| \le C h^{r+1}$ (on note $O(h^{r+1})$)

Interprét : choisit $f \in \mathcal{C}^{r+1}[a,b]$, l'erreur est divisée par 2^{r+1} chaque fois que h est divisé par 2.

Concl : On a intérêt à choisir t_j et ω_j $j=1,\dots,M$ de sorte que r soit le plus grand possible.

Suite : $t_1 t_2 \dots t_M$ donnés, comment calculer les poids $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_M$?

Donc, l'interprétation de ce théorème est la suivante : on choisit une fonction *f*, *r* plus une fois continûment dérivable, on calcule pour différentes valeurs de *h* l'erreur, et on observe que l'erreur donc, l'erreur au sens de cette quantité-là, l'erreur est divisée par *2^(r + 1)*, la puissance *r + 1* ici, chaque fois que *h* est divisé par 2. Voilà le résultat. Et donc, conclusion : et bien maintenant, on a intérêt à choisir les points d'intégration et les poids d'intégration qui définissent ma formule de quadrature et par conséquent cette formule *Lh(f)*, donc on a intérêt à choisir les *tj* et les *ωj*, *j* allant de 1 jusqu'à *M*, de sorte que *r*, qui est ici, *r* c'est le degré du polynôme pour lequel la formule de quadrature coïncide avec l'intégrale, donc, de sorte que *r* soit le plus grand possible. Donc, dans la suite du cours, nous allons faire les deux choses suivantes : dans la suite du cours, nous allons nous poser les deux questions suivantes : supposons que les points d'intégration *t1, t2, tM* soient donnés, comment calculer les poids, les poids que j'ai notés *ω1, ω2*, jusqu'à *ωM*, donc étant donné les points, comment calculer les poids ?

Notes

Summary

5m 50s

Chap. 3 : généralités (fin)

Thm 3.1 : Données : M, $t_1, t_2, \dots, t_M$ points $w_1 w_2 \dots w_M$ poids $J(g) = \sum_{j=1}^{M} w_j g(t_j)$ approcher num. $\int_{-1}^{1} g(t)dt$

$$L_h(f) = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{M} w_j f\left(x_i + h\frac{t_j+1}{2}\right) \text{ approx num. de } \int_a^b f(x)dx$$

Hypothèses : • la formule de quadrature $J(g)$ est exacte pour les polynômes de degré r

$$\int_{-1}^{1} p(t)dt = J(p) = \sum_{j=1}^{M} w_j p(t_j) \qquad \forall p \in \mathbb{P}_r$$

• $f \in \mathcal{C}^{r+1}[a,b]$

Conclusion : $\forall f \in \mathcal{C}^{r+1}[a,b]$ $\exists C > 0$ $\forall 0 < h < b-a$ $\left| \int_a^b f(x)dx - L_h(f) \right| \leq C h^{r+1}$ (on note $O(h^{r+1})$)

Interprét : choisit $f \in \mathcal{C}^{r+1}[a,b]$, l'erreur est divisée par 2^{r+1} chaque fois que h est divisé par 2.

Concl : On a intérêt à choisir t_j et w_j $j = 1, \dots, M$ de sorte que r soit le plus grand possible.

Suite : • $t_1 t_2 \dots t_M$ donnés, comment calculer les poids $w_1 w_2 \dots w_M$?

• Existe-t-il un choix judicieux des $t_1 t_2 \dots t_M$

Et deuxième question : maintenant, existe-t-il un choix judicieux des points d'intégration *t1, t2* jusqu'à *tM* ? Donc nous allons répondre à ces deux questions d'ici la fin du cours.

Notes

Summary

8m 23s