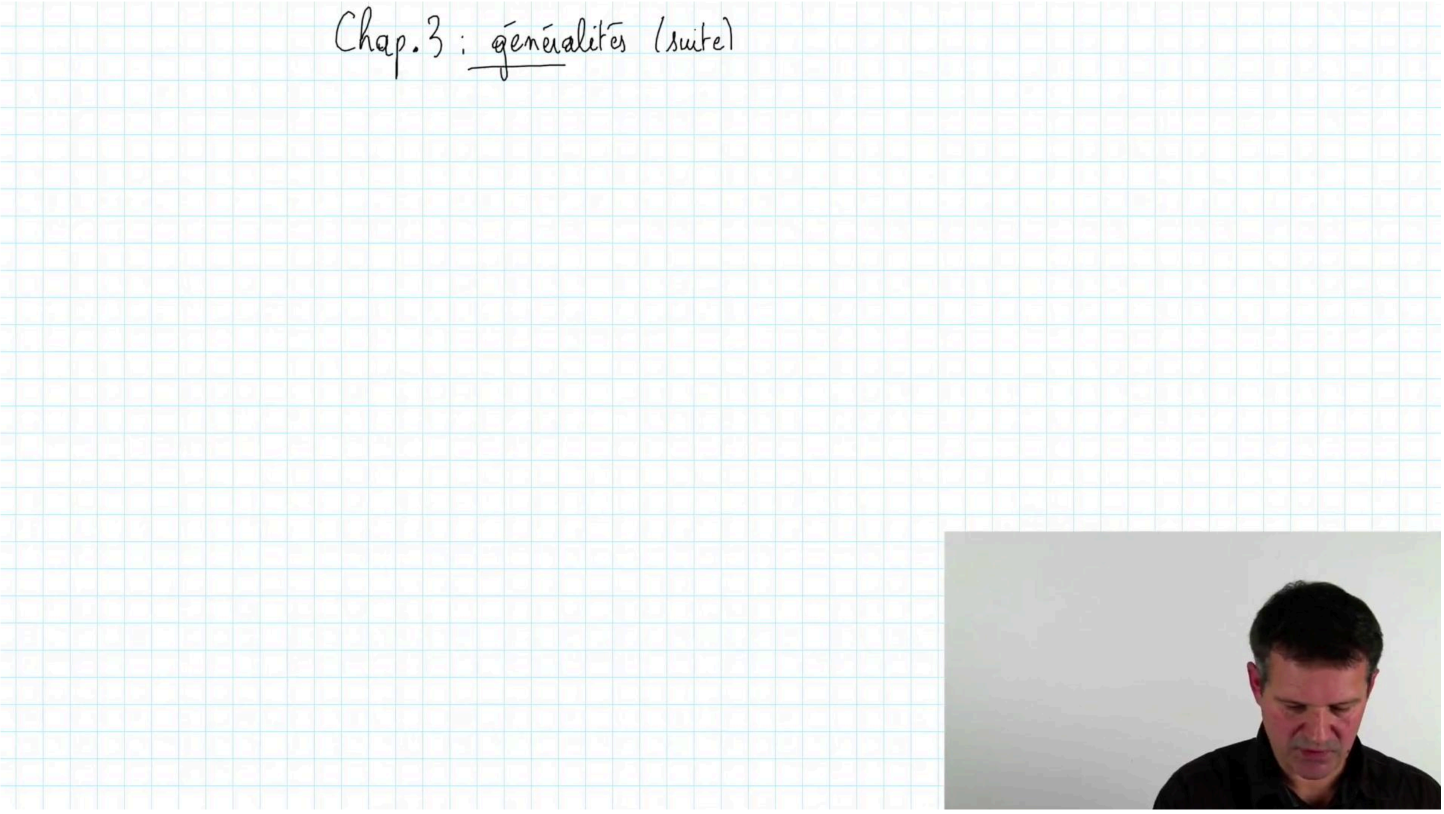
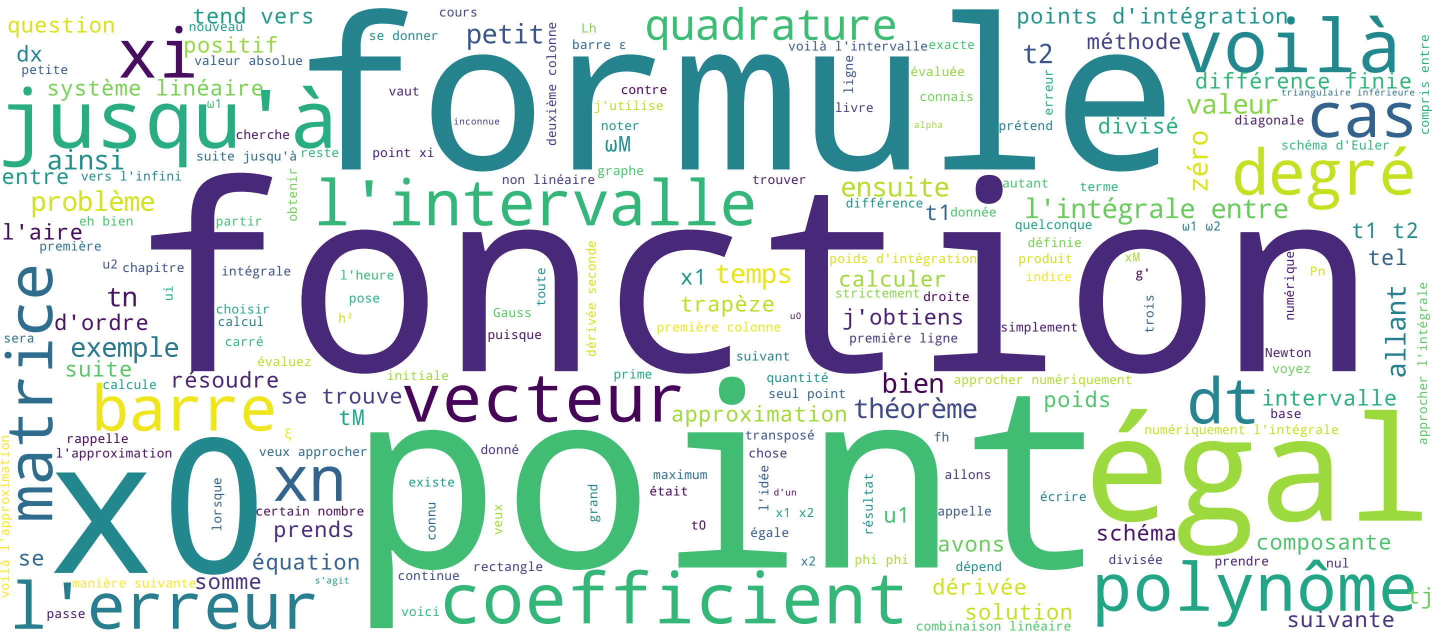


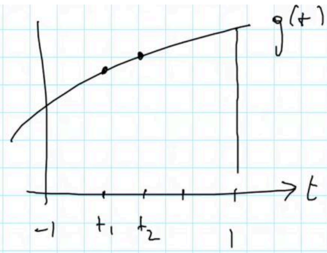


Search MOOC

Video

Chap. 3 : généralités (suite)

$g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ cont. approcher num $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$



Formule de quadrature : M entier pos ($M = 1, 2, 3, \dots$)

$-1 \le t_1 < t_2 < \dots < t_M \le 1$ points d'intégr.

$\omega_1 \quad \omega_2 \quad \dots \quad \omega_M$ poids

Donc, nous sommes ramenés au problème suivant : on se donne une fonction *g* sur l'intervalle *[-1, 1]*, qui est continu, et on veut approcher numériquement l'intégrale en -1 de 1 de *g(t) dt*. Donc voilà, l'intervalle *t* varie entre -1 et 1, et voici le graphe de la fonction *g*. Voilà l'intégrale à approcher. On va définir maintenant ce qu'est une formule de quadrature. « Formule de quadrature » Sous-entendu, pour approcher numériquement l'intégrale entre -1 et 1 de *g(t) dt*. Donc, il faut se donner *M*, un entier positif. En général, *M* vaut 1, 2, 3, éventuellement 4 ou 5 mais rarement des valeurs plus grandes. On se donne ce qu'on appelle des points d'intégration, des valeurs *t1* strictement plus petit que *t2*, et ainsi de suite jusqu'à *tM*, qui sont compris dans l'intervalle [-1, 1], donc les points d'intégration, ici *t2*, et ainsi de suite. Donc l'idée, c'est d'évaluer la fonction en ces points *t1*, *t2*, jusqu'à *tM*. On va se donner également des poids, que je vais noter *ω1*, *ω2*... jusqu'à *ωM*, qu'on appelle les poids d'intégration.

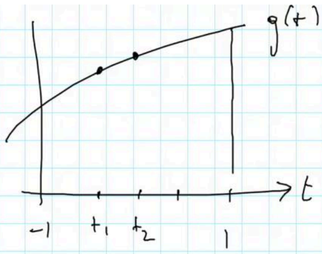
Notes

Summary

0m 01s

Chap. 3 : généralités (suite)

$g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ cont. approcher num $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$



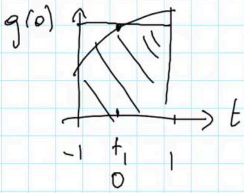
Formule de quadrature : M entier pos ($M = 1, 2, 3, \dots$)

$-1 \le t_1 < t_2 < \dots < t_M \le 1$ points d'intégr.

$\omega_1 \quad \omega_2 \quad \dots \quad \omega_M$ poids

$$J(g) = \omega_1 g(t_1) + \omega_2 g(t_2) + \dots + \omega_M g(t_M)$$

Ex : rectangle : $M = 1$ $t_1 = 0$ $J(g) = 2g(0)$



On veut donc approcher l'intégrale entre -1 et 1 de *g(t) dt* par ce qu'on appelle la formule de quadrature, qui est, donc vous évaluez la fonction *g* au point *t1*, vous évaluez la fonction *g* au point *t2* et ainsi de suite jusqu'à *g* au point *tM*. *g* en *t2* jusqu'à *g* en *tM*. Et vous multipliez ces valeurs par des poids *ω1*, *ω2*, jusqu'à *ωM*. Et voilà l'approximation de l'intégrale entre -1 et 1 de *g(t) dt*. Donc, par exemple, ce qu'on appelle la formule du rectangle consiste à dire la chose suivante : vous avez ici la fonction *g* que vous devez intégrer entre -1 et 1, et vous allez dire : « écoutez, moi je prends un seul point ». Donc si je prends un seul point, je vais choisir ce point étant égal à, donc j'ai un point *M = 1*, ce point est zéro, le milieu de l'intervalle [-1, 1]. Et puis, je vais approcher l'intégrale entre -1 et 1 de *g(t) dt* par l'aire du rectangle correspondant, alors, puisque le rectangle a comme largeur 2, et hauteur, ici, *g(0)*, et bien l'aire sera *2* fois *g(0)*. Ceci définit *J(g)* pour la formule du rectangle, donc *J(g) = 2g(0)*.

Notes

Summary

1m 46s

Chap. 3 : généralités (suite)

$g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ cont. approcher num $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$

Formule de quadrature : M entier pos ($M = 1, 2, 3, \dots$)

$-1 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_M \leq 1$ points d'intégr.

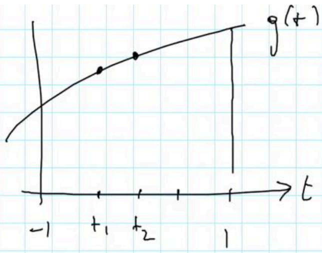
$w_1 \; w_2 \; \dots \; w_M$ poids

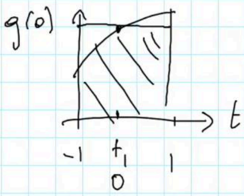
$$J(g) = w_1 g(t_1) + w_2 g(t_2) + \dots + w_M g(t_M)$$

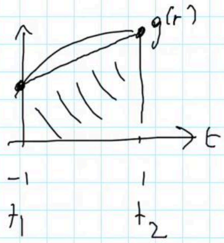
Ex : rectangle : $M = 1$ $t_1 = 0$ $J(g) = 2g(0)$

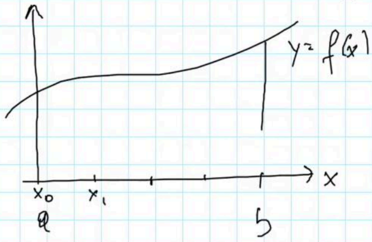
trapèze : $M = 2$ $t_1 = -1$ $t_2 = 1$ $J(g) = g(-1) + g(1)$

Retour à f : $$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{-1}^{1} f\left(x_i + h\frac{t+1}{2}\right) dt$$









Autre exemple, la formule du trapèze. Dans ce cas-là, je vais prendre deux points d'intégration. Donc si je prends deux points d'intégration, voilà *t*, voilà l'intervalle [-1, 1], je veux approcher numériquement l'intégrale en -1 et 1 de *g(t) dt*. Je vais prendre comme points d'intégration *t1 = -1*, *t2 = 1*, et je vais approcher l'aire par l'aire du trapèze qui est hachuré ici. Donc *M = 2*, *t1 = -1*, *t2 = 1*. Et l'aire du trapèze, vous faites le calcul, est donnée par *g(-1) + g(1)*, c'est l'aire du rectangle qui est ici, plus l'aire du triangle qui se trouve ici. Voilà. Donc, revenons maintenant au problème initial. Je vous rappelle, nous avons démontré que l'intégrale entre *a* et *b* de *f(x) dx* était égale, alors nous avons, donc je vous rappelle, voilà *x* qui est compris entre *a* et *b*, nous voulons intégrer numériquement la fonction *f* entre *a* et *b*, donc voilà le graphe de la fonction *f*, et nous allions subdiviser l'intervalle [a, b] en sous-intervalles. Donc ceci est égal à *h/2 ∑ i* allant de 0 à *M -1* des intégrales entre -1 et 1 de *f(xi + h (t + 1)/2) dt*, voilà le résultat que nous avions obtenu, et voilà les points *x0*, *x1*, jusqu'à *xM*.

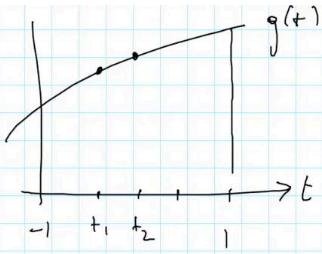
Notes

Summary

3m 29s

Chap. 3 : généralités (suite)

$g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ cont. approcher num $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$



Formule de quadrature : M entier pos ($M = 1, 2, 3, \dots$)

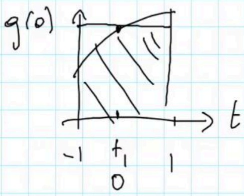
$-1 \le t_1 < t_2 < \dots < t_M \le 1$ points d'intégr.

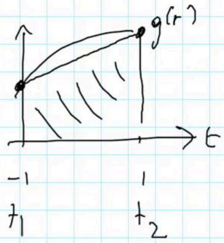
$\omega_1 \quad \omega_2 \quad \dots \quad \omega_M$ poids

$$J(g) = \omega_1 g(t_1) + \omega_2 g(t_2) + \dots + \omega_M g(t_M)$$

Ex : rectangle : $M = 1$ $t_1 = 0$ $J(g) = 2g(0)$

trapèze : $M = 2$ $t_1 = -1$ $t_2 = 1$ $J(g) = g(-1) + g(1)$

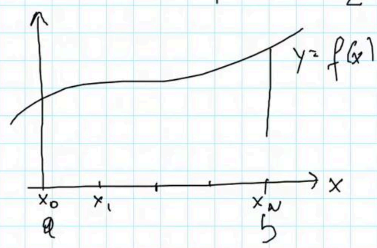




Retour à f :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{-1}^{1} f\left(x_i + h\frac{t+1}{2}\right) dt$$

$$\simeq \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{M} \omega_j \, f\left(x_i + h\frac{t_j+1}{2}\right) = L_h(f)$$



Donc, l'idée maintenant c'est d'utiliser cette formule de quadrature qui se trouve ici, pour approcher cette fonction, ici *g*, qui est définie sur chaque intervalle, donc *g(t)* ça serait *f(xi + h (t+1)/2)*, et donc nous obtenons l'approximation suivante : donc vous avez *h/2* ici, vous avez la somme sur tous les intervalles *xi*, sur tous les intervalles qui sont ici, premier, deuxième, troisième, quatrième. Et puis vous avez maintenant la somme, ici, sur *ω1 g(t1)*, *ω2 g(t2)* jusqu'à *ωM g(tM)*, donc ceci devient la somme sur tous les *j* allant de 1 jusqu'à *M* de *ωj*, que vous retrouvez ici, *ω1*, *ω2*, etc. fois la fonction *f* qui se trouve ici, évaluée au point *tj*. Donc, vous avez ici *f(xi + h (tj+1)/2)*. Donc, voilà l'approximation de cette intégrale. J'obtiens cette approximation ici, pour autant que si j'utilise cette formule de quadrature qui est définie de cette manière suivante. Donc cette quantité-là, c'est ce que je vais appeler *l* indice *h* de *f*, c'est ce qui me permets, *l* indice *h* de *f*, c'est l'approximation de l'intégrale entre *a* et *b* de *f(x) dx*, lorsque j'utilise cette formule de quadrature, qui est définie par un certain nombre de points et un certain nombre de poids.

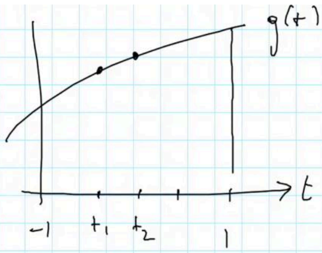
Notes

Summary

5m 29s

Chap. 3 : généralités (suite)

$g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ cont. approcher num $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$



Formule de quadrature : M entier pos ($M = 1, 2, 3, \dots$)

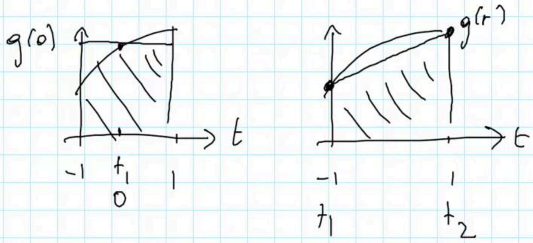
$-1 \le t_1 < t_2 < \dots < t_M \le 1$ points d'intégr.

$\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_M$ poids

$$J(g) = \omega_1 g(t_1) + \omega_2 g(t_2) + \dots + \omega_M g(t_M)$$

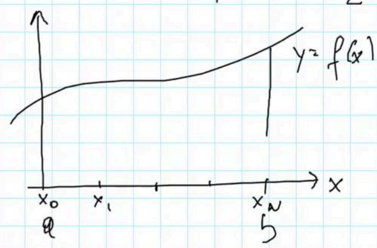
Ex : rectangle : $M = 1$ $t_1 = 0$ $J(g) = 2g(0)$

trapèze : $M = 2$ $t_1 = -1$ $t_2 = 1$ $J(g) = g(-1) + g(1)$



Retour à f : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{-1}^{1} f\left(x_i + h\frac{t+1}{2}\right) dt$

$$\simeq \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{M} \omega_j \, f\left(x_i + h\frac{t_j+1}{2}\right) = L_h(f)$$



Questions :
- choix de $t_1 t_2 \dots t_M$? $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_M$?
- erreur entre $\int_a^b f(x)\,dx$ et $L_h(f)$?

Donc les questions naturelles que je me pose maintenant sont les suivantes, il y en a en tout cas 2, la question maintenant, c'est comment choisir les points d'intégration *t1*, *t2*, jusqu'à *tM*, et les poids d'intégration *ω1*, *ω2*, jusqu'à *ωM*, et la deuxième question, c'est quelle est l'erreur que je fais entre, lorsque je veux approcher l'intégrale entre *a* et *b* de *f(x) dx*, et ce nouvel objet que je vais utiliser pour approcher cette intégrale est donc *lh(f)*.

Notes

Summary

7m 11s