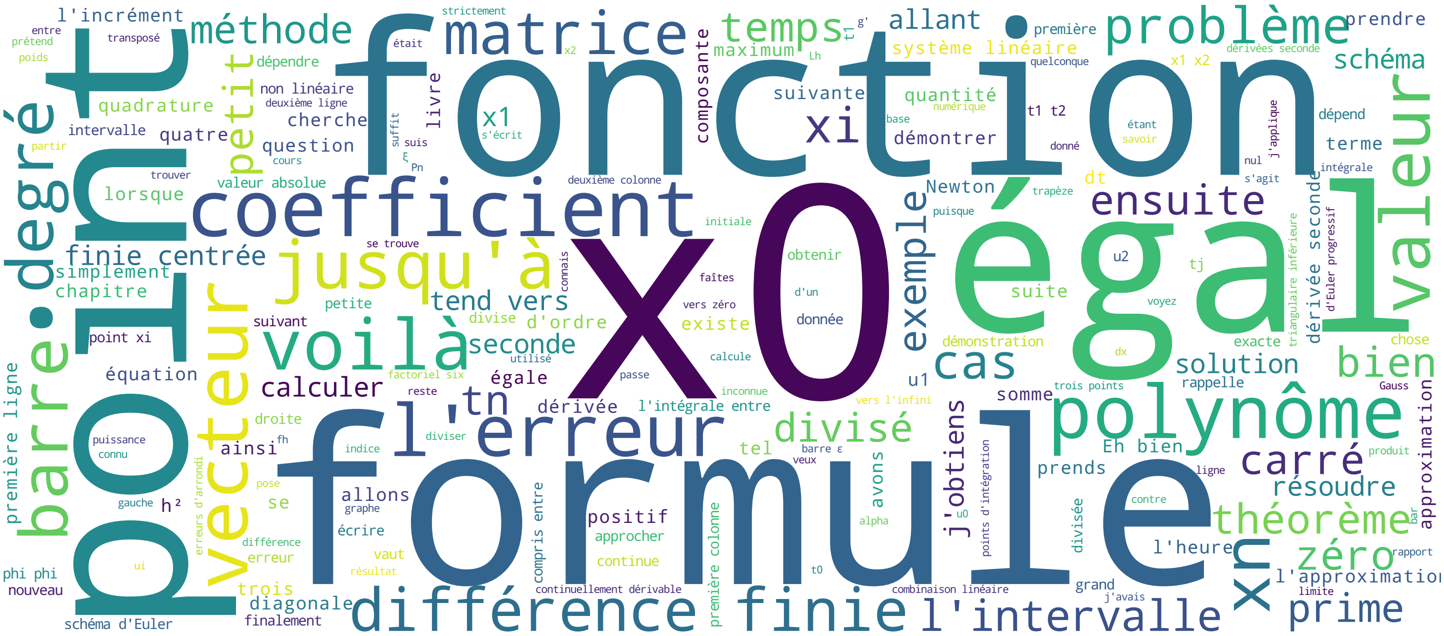
Dérivées numériques d'ordre 2

Introduction à l'analyse numérique

Prof. Marco Picasso



Search MOOC

Video

Dériv. num. ordre 2

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^2 $x_0 \in \mathbb{R}$ $f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h/2) - f'(x_0-h/2)}{h}$

$f'(x_0+\frac{h}{2}) \simeq \frac{f(x_0+h/2+h/2) - f(x_0+h/2-h/2)}{h}$ $f'(x_0-h/2) \simeq \frac{f(x_0-h/2+h/2) - f(x_0-h/2-h/2)}{h}$

$f''(x_0) \simeq f(x_0+h)$

Passons maintenant aux dérivées d'ordre deux. Donc j'ai une fonction f, de R dans R, qui est deux fois continuellement dérivable, x0 appartenant à R fixé, et je veux approcher, cette fois-ci, la dérivée seconde en x0. Donc si j'applique la formule du début de ce chapitre, c'est la limite quand h tend vers zéro de f prime en x0 plus h sur deux, moins f prime en x0 moins h sur deux, le tout divisé par h. Donc la formule que j'avais tout à l'heure pour f prime, je l'applique à f seconde. Et donc maintenant, je vais approcher f prime de x0 plus h sur deux par la formule de différence finie centrée, c'est-à-dire f de x0 plus h sur deux, plus l'incrément h sur deux, moins f de x0 plus h sur deux, moins l'incrément h sur deux. Donc je divise ça par h. De même, j'applique une formule similaire à f prime de x0 moins h sur deux, donc je l'approche par f de x0 moins h sur deux, plus l'incrément h sur deux, moins f de x0 moins h sur deux, moins l'incrément h sur deux, et je divise par h. Donc la dérivée seconde, f seconde de x0, sera approchée, donc je dois prendre la différence de ces deux quotients et j'obtiens f. Donc ici, j'ai f de x0 plus h sur deux. Plus h sur deux, c'est-à-dire f de x0 plus h.

Notes

Summary

0m 04s

Dériv. num. ordre 2

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$ $x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h/2) - f'(x_0-h/2)}{h}$

$$f'(x_0+\tfrac{h}{2}) \simeq \frac{f(x_0+h/2+h/2) - f(x_0+h/2-h/2)}{h} \qquad f'(x_0-h/2) \simeq \frac{f(x_0-h/2+h/2) - f(x_0-h/2-h/2)}{h}$$

$$f''(x_0) \simeq \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$$

$$\left| f''(x_0) - \frac{f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)}{h^2} \right| = O(h^2)$$

Thm 2.5 : $\forall f \in \mathcal{C}^4$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ $\exists C > 0$ $\forall 0 < h \leq 1$ $\left| f''(x_0) - \frac{f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)}{h^2} \right| \leqslant C h^2$

Ici, f de x0 et encore une fois f de x0, donc je vais avoir moins deux fois f en x0 Et puis finalement j'ai encore ici f de x0 moins h. Et je dois diviser ceci par h au carré. Et on va même démontrer que cette approximation, on va démontrer que f seconde de x0 peut être approchée par une formule de différence finie centrée, puisque j'ai utilisé ici que des formules de différence finie centrée. Donc à nouveau, deux fois la valeur en x0, une fois la valeur à gauche en x0 moins h, et une fois la valeur à droite en x0 plus h. Eh bien, cette quantité-là est d'ordre h carré puisque j'ai utilisé des formules de différence finie centrée. On peut même être plus précis mathématiquement et démontrer le théorème suivant, qui est le théorème 2.5 du livre, qui dit la chose suivante : pour toute fonction f quatre fois continuellement dérivable, pour tout x0 dans R, je peux exhiber un C positif, donc qui va dépendre de f et de x0, tel que pour tout h, C ne va pas dépendre de h, h compris entre zéro et un, l'erreur, f seconde de x0 moins l'approximation par la formule de différence finie centrée, donc moins deux fois la valeur en x0, une fois la valeur à gauche, x0 moins h, une fois la valeur en x0 plus h, cette quantité-là est plus petite ou égale à h carré.

Notes

Summary

1m 56s

Dériv. num. ordre 2

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ C^2 $x_0\in\mathbb{R}$ $\quad f''(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h/2)-f'(x_0-h/2)}{h}$

$f'(x_0+\frac{h}{2}) \simeq \frac{f(x_0+h/2+h/2)-f(x_0+h/2-h/2)}{h} \qquad f'(x_0-h/2)\simeq \frac{f(x_0-h/2+h/2)-f(x_0-h/2-h/2)}{h}$

$$f''(x_0)\simeq \frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}$$

$$\left|f''(x_0)-\frac{f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)}{h^2}\right| = O(h^2)$$

Thm 2.5 : $\forall f\in C^4\ \forall x_0\in\mathbb{R}\ \exists C>0\ \forall 0<h\leq 1\quad \left|f''(x_0)-\frac{f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)}{h^2}\right| \leq Ch^2$.

Rem : C dep de f x_0 pas de h

Interp : Choisit, f x_0 l'erreur est divisée par 4 chaque fois que h est divisé par 2.

Rem : erreur d'arrondis $O\left(\frac{1}{h^2}\right)$

Dem : $f(x_0+h)=f(x_0)+h f'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(x_0)+\frac{h^3}{6}f'''(x_0)+\frac{h^4}{24}f^{(4)}(\xi) \qquad x_0\leq\xi\leq x_0+h$

$f(x_0-h) = \ldots.$

Donc comme précédemment, C dépend éventuellement de f et x0 mais pas de h. Comme précédemment, l'interprétation est que l'on choisit un f et un x0, et l'erreur, à savoir la différence entre la dérivée seconde et sa formule de différence finie centrée, est divisée par quatre chaque fois que h est divisé par deux. Encore une remarque à propos des erreurs d'arrondis. Cette fois-ci les erreurs d'arrondis... sont en O de un sur h carré et non plus O de un sur h, tout simplement parce que je suis en train d'évaluer des dérivées secondes et je dois diviser par h au carré. Et finalement, la démonstration, je la laisse en exercice mais vous êtes capable maintenant de faire la démonstration, il suffit de prendre le développement de Taylor : f de x0 plus h égal f de x0, plus h f prime de x0, plus h carré sur deux, factoriel deux, f seconde de x0, plus h trois sur, trois factoriel six, f tierce de x0, plus h quatre sur quatre factoriel, six fois quatre, 24, la dérivée quatrième en un point xi situé entre x0 et x0 plus h. Vous faîtes la même chose avec f de x0 moins h. Vous faîtes la somme de ces deux équations et vous démontrez le résultat annoncé.

Notes

Summary

3m 49s