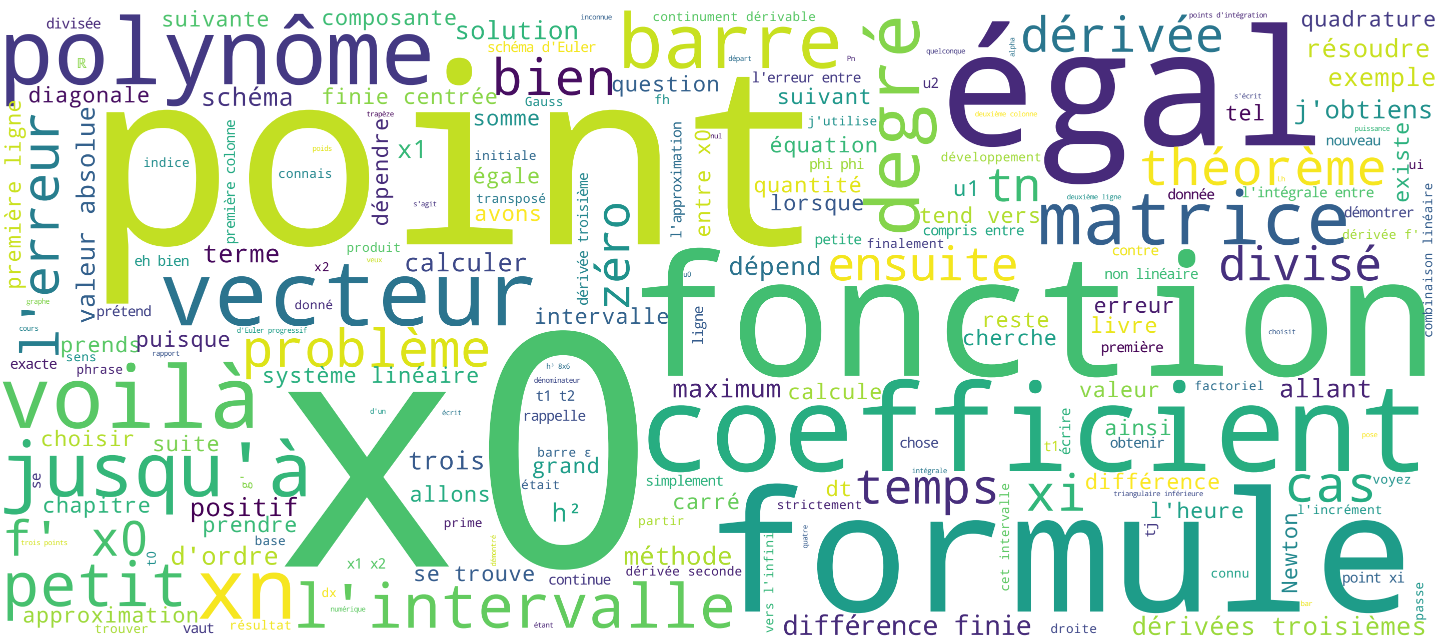
Dérivées numériques d'ordre 1 – Formule de différences finies centrée (1)

Introduction à l'analyse numérique
Prof. Marco Picasso



Search MOOC

Video

EPFL

Dériv. Num. d'ordre 1 : FDF centrée

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h/2) - f(x_0-h/2)}{h} \right| = O(h^2) \ ?$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^3, soit $x_0 \in \mathbb{R}$, soit $h>0$.

$$f(x_0+h/2) = f(x_0) + \frac{h}{2} f'(x_0) + \frac{h^2}{4.2} f''(x_0) + \frac{h^3}{8.6} f'''(\xi) \qquad x_0 \leq \xi \leq x_0 + h/2$$

$$f(x_0-h/2) = f(x_0) - \frac{h}{2} f'(x_0) + \frac{h^2}{4.2} f''(x_0) - \frac{h^3}{8.6} f'''(\eta) \qquad x_0 - h/2 \leq \eta \leq x_0$$

Je vais préciser ce qui se passe sur la formule de différence finie centrée. Contrairement aux formules de différences finies progressives ou rétrogrades, l'erreur, entre la dérivée f'(x0) et la formule de différence finie centrée, est non plus d'ordre 1 mais d'ordre 2 en h². Donc, nous allons préciser ceci de manière mathématique. Soit f une fonction de R dans ℝ, cette fois-ci trois fois continument dérivable, soit x0 dans ℝ et soit h positif donné. Cette fois-ci, le développement de Taylor sera le suivant, on va prendre f(x0+h/2), c'est f(x0) plus l'incrément h/2, fois f'(x0) plus l'incrément au carré, c'est à dire, h²/4 divisé par 2 factoriel c'est à dire 2 fois f''(x0) plus, et je vais m'arrêter là dans le développement de Taylor, donc l'incrément élevé au cube, h³/8 et encore 3 factoriel, c'est à dire 2x3=6, fois la dérivée troisième en un point Xi (ξ), ξ est un point qui se trouve entre x0 et x0+(h/2). Je fais la même chose pour f(x0-h/2) f(x0)-(h/2) fois f'(x0) plus (h²/4x2) fois f''(x0) moins h³/(8x6) fois la dérivée troisième f''' en un point η f'''(η) η se trouvant quelque-part entre x0-(h/2) et x0. Je vais maintenant faire la différence de ces deux lignes, parce que c'est ici la différence qui intervient.

Notes

Summary

0m 05s

Dériv. Num. d'ordre 1 : FDF centrée

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h/2) - f(x_0-h/2)}{h} \right| = O(h^2) \quad ?$$

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^3, soit $x_0 \in \mathbb{R}$, soit $h>0$.

$$f(x_0+h/2) = f(x_0) + \frac{h}{2} f'(x_0) + \frac{h^2}{4.2} f''(x_0) + \frac{h^3}{8.6} f'''(\xi) \qquad x_0 \leq \xi \leq x_0 + h/2$$

$$f(x_0-h/2) = f(x_0) - \frac{h}{2} f'(x_0) + \frac{h^2}{4.2} f''(x_0) - \frac{h^3}{8.6} f'''(\eta) \qquad x_0 - h/2 \leq \eta \leq x_0$$

$$f(x_0+h/2) - f(x_0-h/2) = h f'(x_0) + \frac{h^3}{8.6}\left(f'''(\xi) + f'''(\eta)\right)$$

Thm 2.3 : $\forall f \in C^3 \ \forall x_0 \in \mathbb{R} \ \exists C>0 \ \forall 0<h\leq 1 \quad \left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h/2) - f(x_0-h/2)}{h} \right| \leq C h^2.$

Rem : C dép de f, x_0 mais de ?

Donc, la différence me donne, f(x0+(h/2)) - f(x0-(h/2)) donc, les termes en f(x0) disparaissent. Il me reste ici h fois f'(x0) h fois f'(x0) Les termes en h² disparaissent, c'est pour ça que je vais gagner un ordre ici et il me reste maintenant +h³/(8x6) f'''(ξ)+f'''(η) Voilà, maintenant je prétends que le théorème suivant est vrai. Théorème 2.3 du livre. Pour toute fonction f trois fois continument dérivable puisque je suis allé jusqu'au dérivé troisième pour tout x0 dans ℝ, il existe un C positif tel que pour tout h positif mais plus petit ou égal à 1, on a f'(x0) - l'erreur entre la dérivée f'(x0) et son approximation par une formule de différence finie centrée cette fois-ci. f(x0) + h/2 moins f(x0) - h/2 divisé par h et bien cette erreur est cette fois-ci plus petite ou égale à C h² Même remarque que tout à l'heure : ici, C peut dépendre de f et de x0 puisque dans la phrase, C arrive après pour tout f, pour tout x0 mais C ne peut pas dépendre de h puisque dans la phrase, il se trouve devant pour tout h positif plus petit ou égal à 1 Donc C peut dépendre de f et x0 mais pas de h.

Notes

Summary

2m 16s

Dériv. Num. d'ordre 1 : FDF centrée

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h/2) - f(x_0-h/2)}{h} \right| = O(h^2) \ ?$$

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^3, soit $x_0 \in \mathbb{R}$, soit $h>0$.

$$f(x_0+h/2) = f(x_0) + \frac{h}{2} f'(x_0) + \frac{h^2}{4 \cdot 2} f''(x_0) + \frac{h^3}{8 \cdot 6} f'''(\xi) \qquad x_0 \leq \xi \leq x_0 + h/2$$

$$f(x_0-h/2) = f(x_0) - \frac{h}{2} f'(x_0) + \frac{h^2}{4 \cdot 2} f''(x_0) - \frac{h^3}{8 \cdot 6} f'''(\eta) \qquad x_0 - h/2 \leq \eta \leq x_0$$

$$f(x_0+h/2) - f(x_0-h/2) = h f'(x_0) + \frac{h^3}{8 \cdot 6}\left(f'''(\xi) + f'''(\eta) \right)$$

Thm 2.3 : $\forall f \in C^3 \ \forall x_0 \in \mathbb{R} \ \exists C>0 \ \forall 0<h\leq 1 \quad \left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h/2) - f(x_0-h/2)}{h} \right| \leq C h^2$.

Rem : C dép de f, x_0 mais de h

Interpr : Choisit f, x_0 l'erreur est divisée par $2^2 = 4$ / $10^2 = 100$ chaque fois que h est divisé par 2 / 10

Dem : on ne peut pas choisir $C = \frac{1}{8 \cdot 6} \left| f'''(\xi) + f'''(\eta) \right|$.

Donc, l'interprétation numérique est la suivante : on choisit f et x0 et on s'intéresse à l'erreur lorsque h varie l'erreur, c'est à dire cette quantité là qu'on peut très bien programmer donc si on connait f'(x0), on calcule cette quantité là et on fait la différence Cette erreur est divisée par 2², c'est à dire 4 chaque fois que h est divisé par 2 ou, si vous divisez h par 10 l'erreur sera divisée par 10² c'est à dire 100 chaque fois que h est divisé par 10. Reste à démontrer ce théorème. Démonstration Attention, comme tout à l'heure on ne peut pas choisir-- la tentation c'est de choisir C comme étant égal à cette quantité là 1 sur (8 fois 6) fois la valeur absolue de ces dérivées ici parce que on ne peut pas choisir C=1 sur 8 fois 6 (=48) fois les dérivées troisièmes en ξ plus dérivées troisièmes en η valeur absolue car cette quantité dépend de h.

Notes

Summary

4m 29s

Dériv. Num. d'ordre 1 : FDF centrée

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h/2)-f(x_0-h/2)}{h} \right| = O(h^2) \quad ?$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^3, soit $x_0 \in \mathbb{R}$, soit $h > 0$.

$$f(x_0+h/2) = f(x_0) + \frac{h}{2} f'(x_0) + \frac{h^2}{4.2} f''(x_0) + \frac{h^3}{8.6} f'''(\xi) \qquad x_0 \leq \xi \leq x_0 + h/2$$

$$f(x_0-h/2) = f(x_0) - \frac{h}{2} f'(x_0) + \frac{h^2}{4.2} f''(x_0) - \frac{h^3}{8.6} f'''(\eta) \qquad x_0 - h/2 \leq \eta \leq x_0$$

$$f(x_0+h/2) - f(x_0-h/2) = h f'(x_0) + \frac{h^3}{8.6}\left(f'''(\xi) + f'''(\eta)\right)$$

Thm 2.3 : $\forall f \in C^3 \ \forall x_0 \in \mathbb{R} \ \exists C > 0 \ \forall 0 < h \leq 1 \quad \left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h/2)-f(x_0-h/2)}{h} \right| \leq C h^2.$

Rem : C dép de f, x_0 mais de h

Interpr : Chaît f, x_0 l'erreur est divisée par $2^2 = 4$ chaque fois que
$10^2 = 100$

Dem : on ne peut pas choisir $C = \frac{1}{8.6} |f'''(\xi) + f'''(\eta)|$ car ξ, η d

$$C = \frac{1}{24} \max_{x_0 - 1/2 \leq x \leq x_0 + 1/2} |f'''(x)|$$

car ξ, η dépendent de h au sens où ξ est compris entre x0 et x0+h/2 et η entre x0-h/2 et x0 Par contre, on peut comme tout à l'heure majorer ces dérivées par le maximum des dérivées sur l'intervalle plus grand Donc vous avez ici x0, x0-h/2, x0+h/2 maintenant j'utilise de nouveau le fait que h ≤ 1, ceci est arbitraire on aurait pu dire h ≤ 2 donc vous avez ici 0-h/2 > x0-(1/2) et x0+h/2 < x0+(1/2) Maintenant je vais prendre le maximum sur cet intervalle des dérivées troisièmes et je peux démontrer le théorème avec C finalement je majore les dérivées troisièmes par le maximum de la dérivée troisième sur cet intervalle et j'obtiens que C =1/24 parce que j'ai au dénominateur 1/48 mais j'ai 2 termes donc j'obtiens finalement 1/24 fois le maximum des dérivées troisièmes en valeur absolue sur l'intervalle x0-(1/2) et x0+(1/2) et j'observe bien que ceci dépend des dérivées troisièmes de f, dépend de x0, mais ne dépend pas de h. J'ai donc démontré le théorème.

Notes

Summary

5m 52s