Dérivées numériques d'ordre 1 – Formule de différences finies progressive (1)

Introduction à l'analyse numérique

Prof. Marco Picasso

Search MOOC

Video

EPFL

Dérivée Num. d'ordre 1 : FDF progressive

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \right| = O(h) \;?$$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$, soit $x_0\in\mathbb{R}$, soit $h>0$ Dev. Taylor : $f(x_0+h)=f(x_0)+h f'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(\xi)$ $\quad x_0 \le \xi \le x_0+h$

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \right| = \frac{h}{2}\left|f''(\xi)\right|$$

Thm 2.2

Il s'agit maintenant de préciser les choses du point de vue mathématique. Je veux donc montrer que l'erreur entre la dérivée *f'(x0)* et son approximation par une formule de différence finie progressive est d'ordre 1 en *h*. Soit *f* une fonction de *R* dans *R* 2 fois continûment dérivable, soit *x0* dans *R*, donné, et soit *h* positif, donné. Le développement de Taylor m'assure que l'égalité suivante est vraie. Donc *f* en *x0 + h* est égal à *f* en *x0* plus *h f'* en *x0* plus l'incrément au carré, h² divisé par 2 factoriel, c'est-à-dire 2 fois *f''* en un point *ξ*, *ξ* est un point intermédiaire entre *x0* et *x0 + h*. Donc, de cette égalité, je peux facilement déduire que *f'(x0)* moins *f(x0 + h)* moins *f(x0)*, sur *h*, qui est justement l'approximation par la formule de différence finie progressive; ceci est égal à *h/2* fois la valeur absolue de *f''* en *ξ*. Donc maintenant, je vais énoncer un théorème mathématique, c'est le théorème 2.2 du livre.

Notes

Summary

0m 03s

Dérivée Num. d'ordre 1 : FDF progressive

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right| = O(h) ?$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$, soit $x_0 \in \mathbb{R}$, soit $h > 0$ Dev. Taylor : $f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(\xi)$ $\quad x_0 \leq \xi \leq x_0 + h$

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right| = \frac{h}{2} \left| f''(\xi) \right|$$

Thm 2.2 : $\forall f \in \mathcal{C}^2\ \forall x_0 \in \mathbb{R}\ \exists C > 0\ \forall 0 < h \leq 1$ on a $\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right| \leqslant Ch$.

Rem : C dep de f, x_0 mais de h

Interprét : Choisit f, x_0 l'erreur est divisée par 2 chaque fois que h est.

Donc je prétends l'affirmation suivante, que l'affirmation suivante est vraie : pour toute fonction *f* 2 fois continûment dérivable, pour tout *x0* dans *R*, il existe *C* positif tel que pour tout *h* positif mais plus petit ou égal à 1, on a l'erreur, c'est-à-dire *f'(x0)* moins son approximation par la formule de différence finie progressive, *f(x0 + h) - f(x0)* divisé par *h*, cette quantité-là est plus petite que *C* fois *h*. Une remarque, d'après l'énoncé du théorème, vous voyez ici que pour tout *f*, pour tout *x0*, il existe *C*, à priori, *C* dépend de ce qu'il y a avant, c'est-à-dire de *f* et de *x0*, mais *C* ne dépend pas de ce qu'il y a après dans la phrase, c'est-à-dire de *h*. Donc *C* peut éventuellement dépendre de *f* et *x0* mais pas de *h*. Et l'interprétation numérique que nous allons voir ensuite est la suivante : On choisit une fonction *f*, on choisit un point *x0* et on observe l'erreur, donc cette quantité-là, l'erreur, en faisant varier *h*, lorsque *h* varie. Donc l'erreur, je prétends que l'erreur est divisée par 2 chaque fois que *h* est divisé par 2.

Notes

Summary

1m 42s

Dérivée Num. d'ordre 1 : FDF progressive

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \right| = O(h) \ ?$$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$, soit $x_0\in\mathbb{R}$, soit $h>0$ Dev. Taylor : $f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(\xi)$ $\quad x_0 \le \xi \le x_0+h$

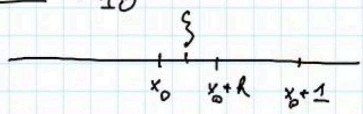
$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \right| = \frac{h}{2} \left| f''(\xi) \right|$$

Thm 2.2 : $\forall f \in \mathcal{C}^2 \ \forall x_0 \in \mathbb{R} \ \exists C>0 \ \forall 0<h\le 1$ on a $\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \right| \le Ch$.

Rem : C dep de f, x_0 mais de h

Interprét : Choisit f, x_0 l'erreur est divisée par 2 / 10 chaque fois que h est divisée par 2 / 10

Dem : On ne peut pas choisir $C = \frac{1}{2}\left| f''(\xi) \right|$ ~~mais~~ car ξ dépend de h



Ou alors, l'erreur est divisée par 10 chaque fois que *h* est divisé par 10. Reste maintenant à démontrer ce théorème, donc " démonstration : ". La tentation, c'est de choisir *C* comme étant 1/2 de *f''* avec *ξ*, mais on ne peut pas, pourquoi ? On ne peut pas, attention, **on ne peut pas** choisir *C = 1/2 f''(ξ)*, pourquoi ? Tout simplement parce que *ξ* dépend de *h*, *ξ* est compris entre *x0* et *x0 +h*. Donc, car *ξ* dépend de *h*. Par contre, ce que je peux très bien faire, c'est majorer la dérivée seconde en un point *ξ* par quelque chose qui ne va plus dépendre de *h*. Je m'explique. Donc voilà le point *x0*, ici vous avez *x0 + h*, *ξ* se trouve quelque part entre *x0* et *x0 + h*. Mais maintenant, je vais utiliser l'hypothèse qui est que *h* plus petit ou égal à 1, et donc, *x0 + h* est plus petit que *x0 + 1*. Donc maintenant, je vais majorer la dérivée seconde en *ξ* par le maximum des dérivées secondes sur l'intervalle *x0, x0 + 1*.

Notes

Summary

3m 31s

Dérivée Num. d'ordre 1 : FDF progressive

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \right| = O(h) \ ?$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^2, soit $x_0 \in \mathbb{R}$, soit $h > 0$ Dev. Taylor : $f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(\xi)$ $\quad x_0 \leq \xi \leq x_0+h$

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \right| = \frac{h}{2} \left| f''(\xi) \right|$$

Thm 2.2 : $\forall f \in C^2 \ \forall x_0 \in \mathbb{R} \ \exists C > 0 \ \forall 0 < h \leq 1$ on a $\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \right| \leq Ch$.

Rem : C dép de f, x_0 mais de h

Interprét : Choisit f, x_0 l'erreur est divisée par $\frac{2}{10}$ chaque fois que h est divisée par $\frac{2}{10}$

Dem : On ne peut pas choisir $C = \frac{1}{2} \left| f''(\xi) \right|$ mais car ξ dépend de h $\quad \xi$

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \right| \leq \frac{h}{2} \max_{x_0 \leq x \leq x_0+1} \left| f''(x) \right|$$

Et donc, je prétends que *f'(x0)* moins l'approximation par la formule de différence finie progressive, *f(x0 + h) - f(x0)* divisé par *h*, donc cette fois-ci, je majore la dérivée seconde en ξ par le maximum des dérivées secondes sur l'intervalle *x0*, *x0 + 1*, donc plus petit ou égal à *h/2* fois le maximum des dérivées secondes, *f''(x)*, pour tous les *x* compris entre *x0* et *x0 + 1*. Et voilà la constante, le *C*, c'est un demi du maximum sur l'intervalle *x0*, *x0 +1* des dérivées secondes. Et ce *C* dépend de *f*, la dérivée seconde de *f*, dépend de *x0* parce que je dois prendre le *x0* sur cet intervalle, mais ne dépend plus de *h*, j'ai donc démontré le théorème.

Notes

Summary

5m 04s