Dérivées numériques d'ordre 1 – Position du problème

Introduction à l'analyse numérique

Prof. Marco Picasso

Search MOOC

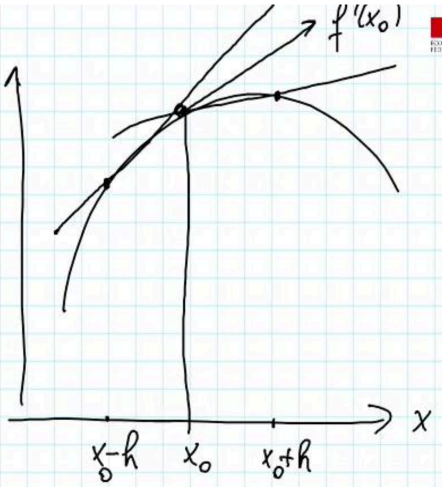
Video

Dériv. num. ordre 1

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \mathcal{C}^1 \quad x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}$$



Commençons par la dérivation numérique d'ordre un. On se donne une fonction f, de R dans R, de classe C1, c'est-à-dire la fonction est continue et sa dérivée f prime est continue. On se donne x0 dans R et on cherche à approcher numériquement f prime de x0. Donc la définition de f prime de x0. Eh bien, vous prenez la valeur f en x0 plus h, h positif, moins f en x0, vous divisez par h, et lorsque h tend vers zéro, ce quotient converge vers la dérivée f prime. Donc le dessin correspondant est le suivant : Voilà x, voilà le graphe de la fonction f, voilà un point x0. Donc, vous prenez x0 plus h. La valeur f en x0 plus h et voilà le quotient. Donc la pente de cette droite nous donne le quotient f de x0 plus h, moins f de x0 divisé par h. f prime de x0, c'est la pente de la tangente. Et donc, vous observez que quand h tend vers zéro, eh bien, cette droite, la pente de cette droite converge vers la pente de cette droite ici. Ensuite, une autre définition possible c'est de prendre cette fois-ci le quotient f de x0, moins f de x0 moins h, et toujours divisé par h, et faire tendre h vers zéro. Donc cette fois-ci, je prends la valeur à gauche, f de x0 moins h, et ainsi l'approximation de la dérivée.

Notes

Summary

0m 03s

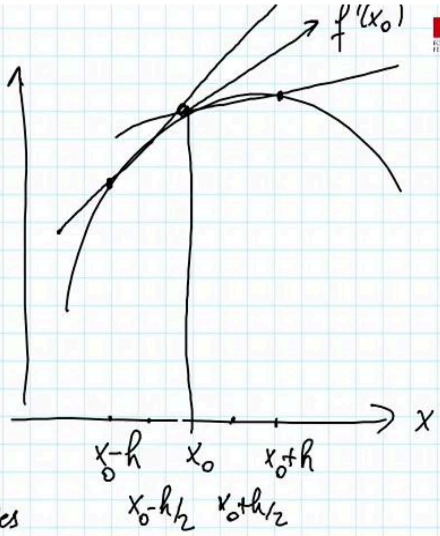
Dériv. num. ordre 1

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h/2) - f(x_0-h/2)}{h}$$



$h > 0$ fixé (petit)

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right| = O(h)$$

Formule de Diff. finies progressive ordre 1 en h

Et finalement, je peux prendre la formule suivante : Donc toujours h qui tend vers zéro. Je prends f de x0 plus h sur deux. Voilà f de x0 plus h sur deux. Je prends aussi la valeur en x0 moins h sur deux. Moins f en x0 moins h sur deux. Je divise par h et je fais tendre h vers zéro. Donc maintenant nous allons considérer un h positif fixé. Nous faisons des calculs avec l'ordinateur donc h positif fixé destiné à être petit et donc je vais approcher f prime de x0 par le quotient. Pardon. f prime de x0 par le quotient f de x0 plus h, moins f de x0, divisé par h, et je vais m'intéresser à l'erreur. L'erreur donc, valeur absolue de la différence entre f prime de x0 et f de x0 plus h, moins f de x0, sur h. Et nous allons démontrer que cette erreur est d'ordre un en h, donc nous allons donner une signification précise de ce grand O de h. Donc ceci est une formule de différence finie. Elle est progressive. Alors, pourquoi est-ce qu'on l'appelle progressive ? Eh bien, parce que je veux évaluer la dérivée en x0 et j'utilise la valeur en x0 plus h. Donc j'avance dans les x positifs. Et elle est d'ordre un. Donc c'est une formule qui est précise à l'ordre un en h.

Notes

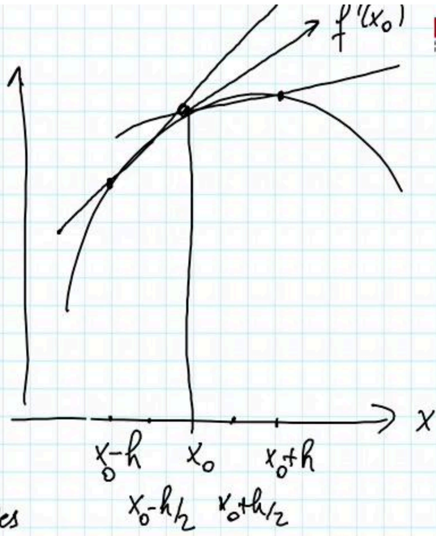
Summary

1m 44s

Dériv. num. ordre 1

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ $x_0\in\mathbb{R}$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h/2)-f(x_0-h/2)}{h}$$



$h>0$ fixé (petit)

$$\left|f'(x_0)-\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right|=O(h)$$ Formule de Diff. finies progressive ordre 1 en h

$$\left|f'(x_0)-\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}\right|=O(h)$$ FDF rétrograde ordre 1 en h

$$\left|f'(x_0)-\frac{f(x_0+h/2)-f(x_0-h/2)}{h}\right|=O(h^2)$$ FDF centrée ordre 2 en h

Donc, de même, je peux aussi approcher la dérivé à h fixé, f prime de x0, par la formule de différence finie rétrograde. f de x0, moins f de x0 moins h, le tout divisé par h. Je prends la valeur absolue, voilà l'erreur. Et comme précédemment, cette erreur est d'ordre un en h. Donc ceci est une formule de différence finie, cette fois-ci rétrograde. Pourquoi rétrograde ? Parce que je veux approcher la dérivée en x0 et j'utilise la valeur en x0 moins h. Rétrograde, elle est aussi d'ordre un en h. Et finalement, je vais cette fois-ci utiliser la formule de différence finie centrée. Donc f de x0 plus h sur deux, moins f de x0 moins h sur deux. Je vais toujours divisé par h parce que la distance entre x0 plus h sur deux et x0 moins h sur deux est bien h. Donc voilà l'erreur, cette fois-ci. Et cette erreur est non plus en h mais en h carré. Et ceci est une formule de différence finie centrée. Pourquoi centrée ? Parce que je veux approcher la dérivée en x0 et j'utilise les valeurs à gauche et à droite, x0 plus h sur deux, x0 moins h sur deux. Et cette formule centrée est d'ordre deux en h, donc c'est le grand O de h carré. Donc nous allons, dans la suite, démontrer et préciser la signification de ces grands O de h et grands O de h carré.

Notes

Summary

3m 26s