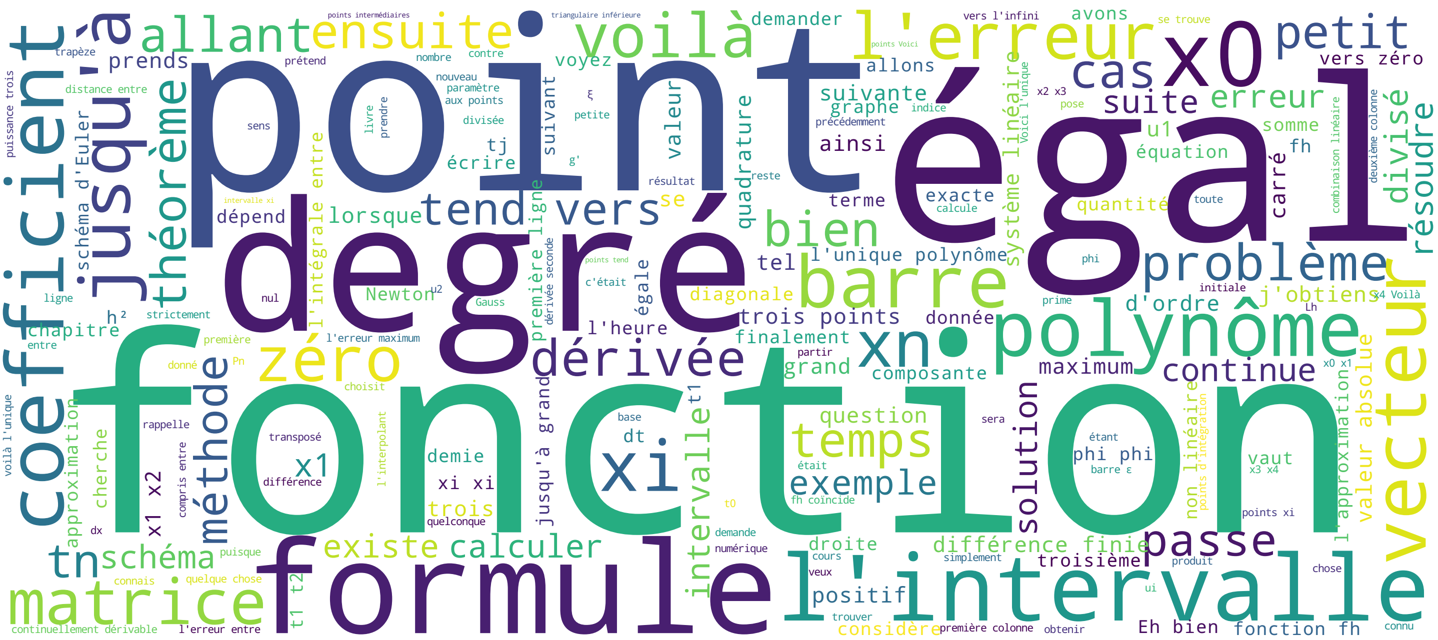
Interpolation de degré 2 par intervalles

Introduction à l'analyse numérique

Prof. Marco Picasso

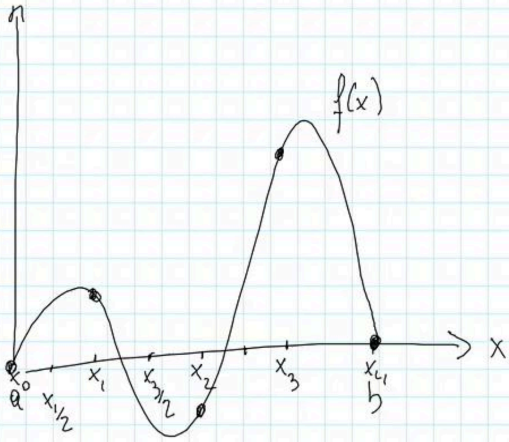


Search MOOC

Video

EPFL

Interpol degré 2 par intervalle :



$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$x_i = a + \overbrace{\frac{b-a}{N}}^{h}\, i \qquad i=0,1,\dots,N$$

$$f_h \in \mathcal{C}^0[a,b]$$

$$f_h(x_i) = f(x_i) \qquad i=0,1,\dots,N$$

$$f_h(x_{i+1/2}) = f(x_{i+1/2}) \qquad i=0,1,\dots,N-1$$

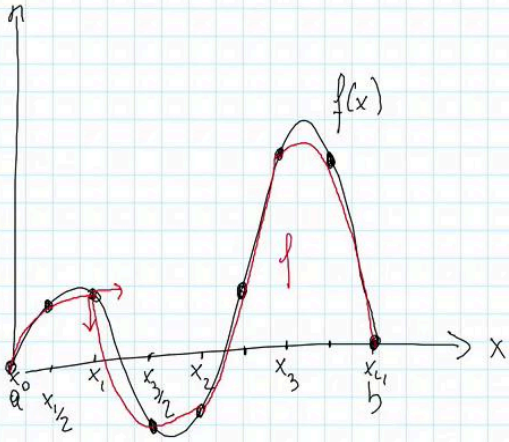
Je passe maintenant à l'interpolant de degré deux par intervalles. Comme précédemment, je considère une fonction f, définie sur l'intervalle a, b dans R. Et je considère des points xi, équidistants sur l'intervalle a, b, a plus b moins a, sur grand N, i, i allant de zéro, un, jusqu'à grand N, avec toujours le paramètre h, qui est b moins a, sur grand N. Donc de nouveau, voilà le graphe de la fonction f sur l'intervalle a, b. Donc je prends quatre points équidistants, x0, x1, x2, x3, x4. Voilà le graphe de la fonction f. Alors je vais construire une fonction fh qui est, encore une fois, seulement continue sur l'intervalle a, b, pas plus. Je vais demander que cette fonction fh coïncide avec la fonction f, de nouveau, aux points xi. Donc fh de xi est égal à f de xi pour tous les i allant de zéro, un, jusqu'à n, comme précédemment. Mais je vais demander encore quelque chose de supplémentaire. Je vais demander que la fonction fh coïncide avec la fonction f au point milieu, xi plus une demie. xi plus une demie. f en xi plus une demie, i allant de zéro, un, jusqu'à grand N moins un. Donc les points xi plus une demie sont les points intermédiaires entre xi et xi plus un, donc x une demie, c'est le point intermédiaire entre x0 et x1.

Notes

Summary

0m 03s

Interpol degré 2 par intervalle :



$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$x_i = a + \overset{h}{\frac{b-a}{N}}\, i \qquad i = 0, 1, \dots, N$

$f_h \in \mathcal{C}^0[a,b]$

$f_h(x_i) = f(x_i) \qquad i = 0, 1, \dots, N$

$f_h(x_{i+1/2}) = f(x_{i+1/2}) \qquad i = 0, 1, \dots, N-1$

$f_h|[x_i, x_{i+1}] \in \mathbb{P}_2 \qquad i = 0, 1, \dots, N-1$

Ensuite vous avez x trois demie et ensuite de suite. Donc les fonction f et fh doivent coïncider en ces points intermédiaires. Et finalement je demande que fh, sur chaque intervalle xi, xi plus un. Donc sur chaque intervalle xi, xi plus un, j'ai trois valeurs disponibles et je demande que fh sur l'intervalle xi, xi plus 1 soit un polynôme, cette fois-ci, non pas de degré un mais de degré 2. Donc voilà l'interpolant de degré deux, donc ceci sur tous les intervalles, i allant de zéro, un, jusqu'à grand N moins un. Donc je vais maintenant représenter l'interpolant de degré deux. Sur le premier intervalle x0, x1, vous avez 3 points. Voici l'unique polynôme de degré deux qui passe par ces trois points. Sur l'intervalle x1, x2, vous avez aussi trois points. Voici l'unique polynôme de degré deux qui passe par ces 3 points. Et vous pouvez constater que la dérivée à gauche diffère de la dérivée à droite au point x1. Donc la fonction est continue mais pas C1. Et je continue sur l'intervalle x2, x3, voilà l'unique polynôme de degré deux qui passe par ces trois points. Et finalement, sur l'intervalle x3, x4, voilà l'unique polynôme de degré deux qui passe par ces trois points.

Notes

Summary

1m 58s

Interpol degré 2 par intervalle :

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$

$x_i = a + \overbrace{\frac{b-a}{N}}^{h}\, i \qquad i=0,1,\dots,N$

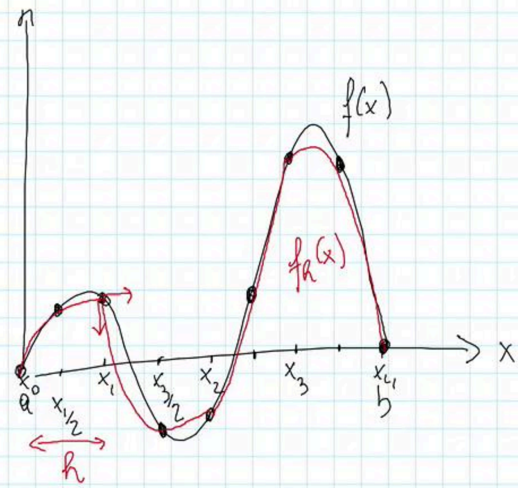
$f_h \in \mathcal{C}^0[a,b]$

$f_h(x_i) = f(x_i) \qquad i=0,1,\dots,N$

$f_h(x_{i+1/2}) = f(x_{i+1/2}) \qquad i=0,1,\dots,N-1$

$f_h|_{[x_i,x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_2 \qquad i=0,1,\dots,N-1$

$f_h \xrightarrow[N\to\infty]{h\to 0} f$?



Thm 1.2 $\exists C>0 \ \forall f \in \mathcal{C}^3[a,b] \ \forall h>0 \qquad \max_{a\leq x\leq b} |f_h(x)-f(x)| \leq C$

Et j'ai, voilà, maintenant construit ma fonction fh de x, interpolant de degré deux par intervalles. Et la question que je me pose à nouveau c'est l'erreur, donc vous voyez ici l'erreur maximum, est-ce que cette erreur va tendre vers zéro lorsque le paramètre h, qui est la distance entre, toujours la distance entre deux points, tend vers zéro ? Donc, est-ce que fh converge dans un sens, à préciser, vers f lorsque h tend vers zéro ? Ou de manière équivalente, lorsque n, le nombre de points, tend vers plus l'infini ? Et la réponse est, de nouveau, positive et donnée par le théorème 1.2 du livre. Supposons maintenant qu'il existe un C positif tel que, pour tout f, cette fois-ci C3 sur l'intervalle a, b. Donc je dois supposer cette fois-ci que f est 3 fois continuellement dérivable. Tout à l'heure, sur l'interpolant de degré un c'était 2 fois, maintenant c'est trois fois. Donc, il existe C, tel que pour tout f, tout h positifs, donc encore une fois, C ne dépend ni de f, ni de h, l'erreur maximum sur l'intervalle a, b, donc à nouveau fh de x moins f de x, voilà l'erreur en valeur absolue au point x. Je considère le maximum de cette erreur sur l'intervalle a, b.

Notes

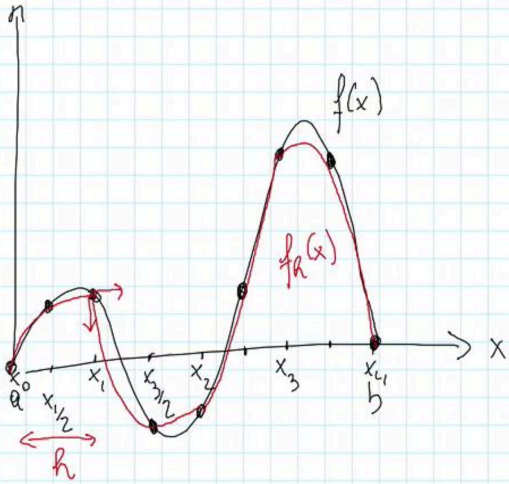
Summary

3m 14s

Interpol <u>degré 2 par intervalle</u> :

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$x_i = a + \underbrace{\frac{b-a}{N}}_{h} i \qquad i = 0, 1, \dots, N$



$f_h \in \mathcal{C}^0[a,b]$

$f_h(x_i) = f(x_i) \qquad i = 0, 1, \dots, N$

$f_h(x_{i+1/2}) = f(x_{i+1/2}) \qquad i = 0, 1, \dots, N-1$

$f_h|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_2 \qquad i = 0, 1, \dots, N-1$

$f_h \xrightarrow[N \to +\infty]{h \to 0} f$?

Thm 1.2 $\exists C > 0 \ \forall f \in \mathcal{C}^3[a,b] \ \forall h > 0 \qquad \max_{a \le x \le b} |f_h(x) - f(x)| \le C h^3 \max_{a \le x \le b} |f'''(x)|$

Interprét : $f \in \mathcal{C}^3[a,b]$ l'erreur divisée par 2^3 chaque fois que h divisé par 2

Eh bien, cette erreur est majorée par C, cette fois-ci h à la puissance trois, fois le maximum des dérivées, cette fois-ci troisièmes, en valeur absolue, sur l'intervalle a, b. Donc à nouveau, l'interprétation ou l'expérience numérique que l'on peut faire est la suivante : On choisit une fonction f trois fois continuellement dérivable. On calcule l'erreur entre f et fh. Et on observe que l'erreur, donc cette quantité-là, l'erreur maxi sur l'intervalle a, b, l'erreur est divisée par, cette fois-ci, non pas deux au carré mais deux puissance trois, c'est-à-dire huit, chaque fois que h est divisé par deux.

Notes

Summary

4m 34s