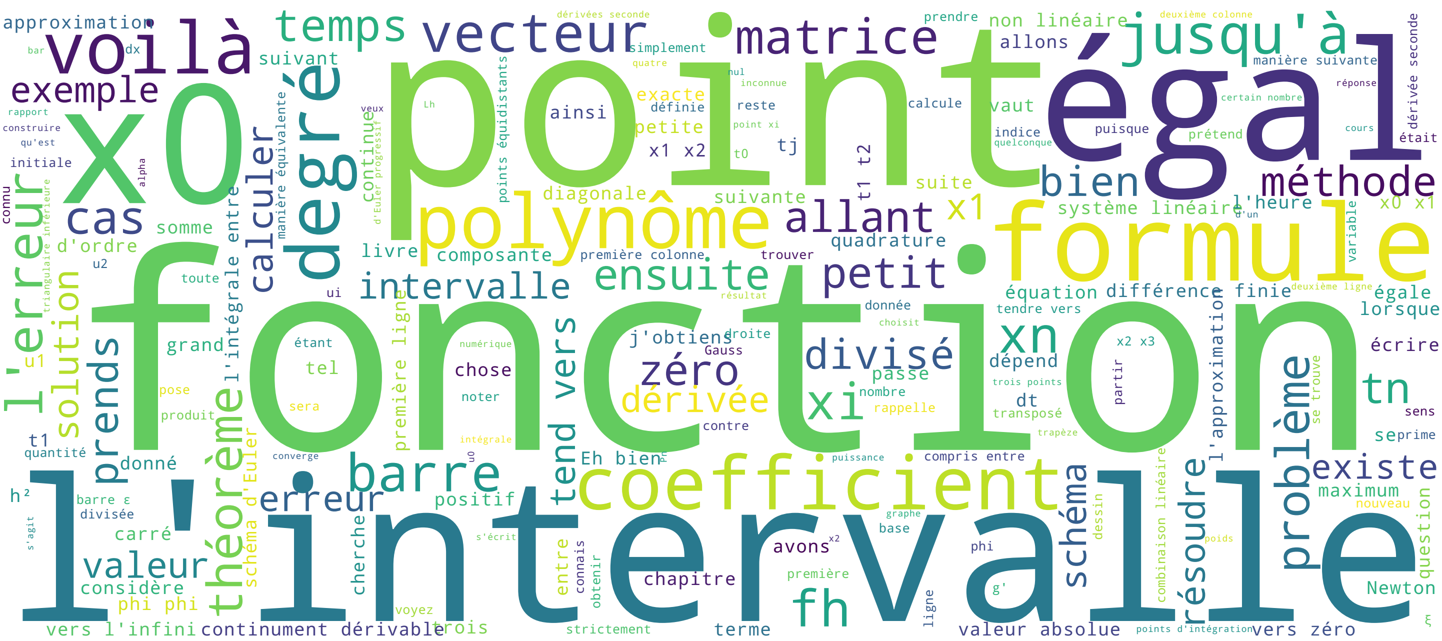
Interpolation de degré 1 par intervalles

Introduction à l'analyse numérique

Prof. Marco Picasso



Search MOOC

Video

EPFL

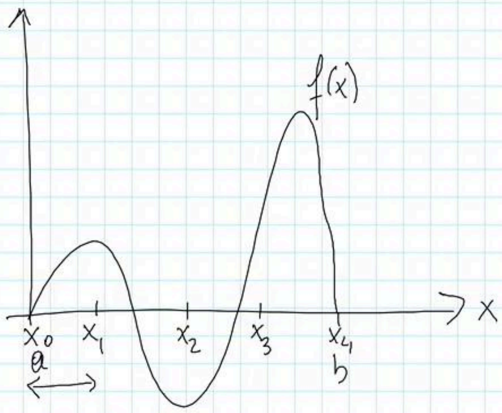
Interpol degré 1 par intervalle :

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$x_i = a + \overset{h}{\frac{b-a}{N}}\, i \qquad i = 0, 1, \dots, N$

$f_h \in \mathcal{C}^0[a,b]$

$f_h(x_i) = f(x_i) \qquad i = 0, 1, \dots, N$



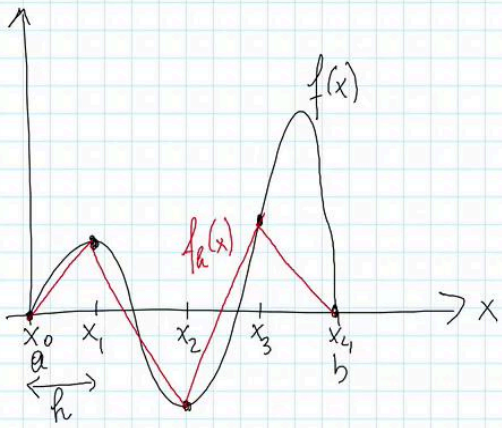
Voilà maintenant, je vais vous parler de l'interpolante de degré 1 par intervalle. Donc je considère une fonction *f* définie dans l'intervalle *a*, *b* dans *R* Je considère des points équidistants *Xi* égal *a* plus *b-a* sur grand *N* fois *i*, *i* allant de 0, 1 jusqu'à grand *N*. Donc je considère ici l'intervalle *a*, *b*, voilà la variable *x*. La fonction *f* est définie sur l'intervalle *[a, b]*. Je prends un certain nombre de points équidistants sur cet intervalle *a*, *b* que je vais noter *x0, x1, x2, x3*, ici jusqu'à *x4*. Donc je prends la fonction *f* sur l'intervalle *[a, b]*. La voici, voilà *f(x)*. Et je vais construire une fonction *fh* de la manière suivante, donc ce *fh* sera l'interpolante de degré 1 par intervalle de la fonction *f*. Cette fonction *fh* est continue sur l'intervalle *[a, b]*, cette fonction *fh* doit coïncider avec la fonction *f* au point *xi*. Pour tous les *i* allant de 0,1 jusqu'à *N*. Alors ici on a utilisé l'indice *h* parce que *h*, alors qu'est-ce-que *h* ?

Notes

Summary

0m 03s

Interpol degré 1 par intervalle :



$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$x_i = a + \overbrace{\frac{b-a}{N}}^{h} i \qquad i = 0, 1, \ldots, N$

$f_h \in \mathcal{C}^0[a,b]$

$f_h(x_i) = f(x_i) \qquad i = 0, 1, \ldots, N$

$f_h|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1 \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1$

$f_h \xrightarrow[N \to \infty]{h \to 0} f$?

h, ici, c'est *(b-a)/N*, c'est la distance qu'il y a entre deux points consécutifs, et c'est ce *H* qui va tendre vers zéro, ou de manière équivalente *N* qui va tendre vers l'infini. Donc les fonctions *f*, *fh* doivent coïncider au point *xi*. Alors je demande encore que *Fh* restreint sur chaque intervalle *xi*, *xi+1* soit un polynôme de degré 1 pour tous les intervalles, *i* allant de 0,1 jusqu'à *N-1*. Donc *fh*, sur l'intervalle *x0; x1* est un polynôme de degré 1 qui passe par *f(x)*, *f(xo)*, *f(x0)*, *x1*, *f(x1)* donc, même chose sur l'intervalle *x1; x2 x2*, *x3*, donc chaque fois un autre polynôme de degré 1, et *x3*, *x4*. Donc voilà la fonction *fh(x)* et la question que je me pose, comme tout à l'heure, c'est est-ce que *fh* converge dans un sens à définir vers la fonction *f*, lorsque *h* tend vers zéro, ou de manière équivalente, lorsque le nombre de points *N* tend vers l'infini. Et la réponse, et donc voilà l'erreur, je vais considérer cette erreur ici, l'erreur maximum sur l'intervalle *a*, *b*.

Notes

Summary

1m 34s

Interpol degré 1 par intervalle :

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$

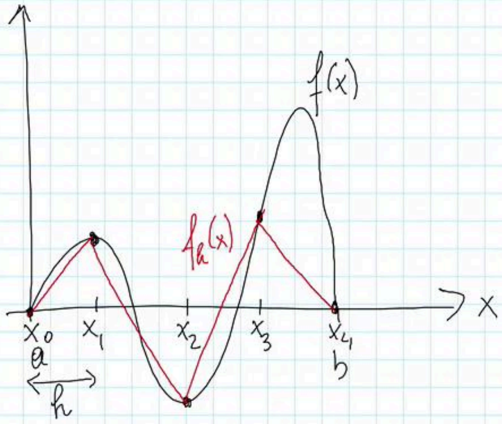
$x_i = a + \overbrace{\frac{b-a}{N}}^{h}\, i \qquad i=0,1,\dots,N$

$f_h \in \mathcal{C}^0[a,b]$

$f_h(x_i)=f(x_i) \qquad i=0,1,\dots,N$

$f_h|_{[x_i,x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1 \qquad i=0,1,\dots,N-1$

$f_h \xrightarrow[N\to\infty]{h\to 0} f$?



Thm 1.2 : $\exists C>0\ \forall f\in\mathcal{C}^2[a,b]\ \forall h>0 \quad \max_{a\le x\le b}|f_h(x)-f(x)| \le C h^2 \max_{a\le x\le b}|f''(x)|$

Interprét : $f\in\mathcal{C}^2[a,b]$ l'erreur est au moins divisée par 2^2 chaque fois que h est divisé par 2.

Et le résultat théorique est le suivant : donc théorème *I2* du livre : il existe un *C* positif tel que si la fonction *f* est deux fois continument dérivable sur l'intervalle *[a, b]*, donc la fonction *f* doit être deux fois continument dérivable sur l'intervalle *[a, b]*, ce qui est le cas de mon dessin; pour tout *h* positif, on a l'erreur donc *fh(x)-f(x)*, je prends la valeur absolue, et je regarde le maximum de cette erreur sur l'intervalle *[a, b]*, donc cette erreur que je représente ici. Eh bien, l'erreur est plus petite ou égale à ce *C* fois *h*² fois le maximum de ces dérivées seconde en valeur absolue sur l'intervalle *[a, b]*. Donc d'après l'énoncé de ce théorème, *C* ne dépend ni de *f*, ni de *h*, donc il existe *C* tel que pour tout *f*, pour tout *h*, *C* ne dépende ni de *f* ni de *h*. Et l'expérience numérique ou l'interprétation de ce théorème est la suivante : c'est qu'on choisit une fonction *f* deux fois continument dérivable sur l'intervalle *a*, *b* pour un *h* donné on mesure l'erreur, et on doit observer que l'erreur est au moins divisé par 2², c'est-à-dire 4, chaque fois que *h* est divisé par 2.

Notes

Summary

3m 07s