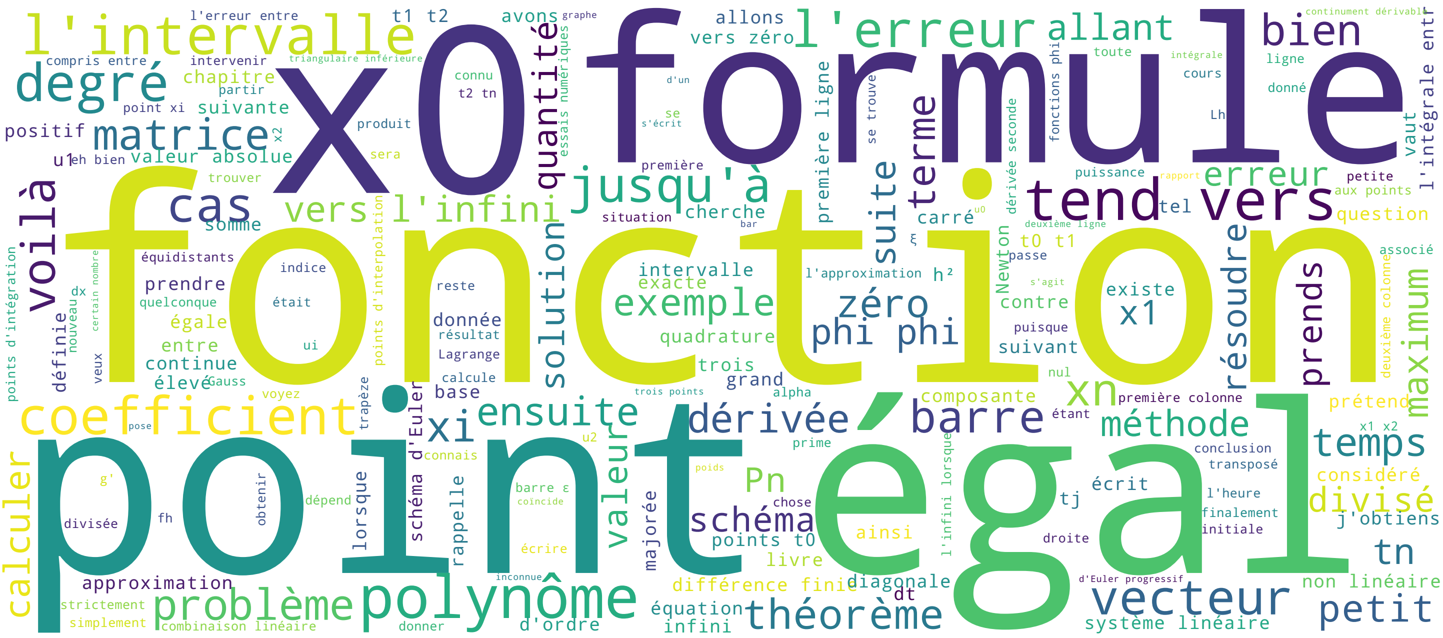
Théorème 1.1

Introduction à l'analyse numérique

Prof. Marco Picasso



Search MOOC

Video

EPFL

Thm 1.1 : données $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

$t_j = a + \frac{b-a}{n} j \quad j=0,1,2,\dots,n$ équidistants

$p_n \in \mathbb{P}_n \quad p_n(t_j) = f(t_j) \quad j=0,1,\dots,n$

$p_n(t) = f(t_0)\varphi_0(t) + f(t_1)\varphi_1(t) + \dots + f(t_n)\varphi_n(t)$

hyp : $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$

Maintenant, je vous présente le théorème 1.1 du livre, *(écrit)* qui nous permet d'expliquer les résultats dans un certain nombre de cas. Je vous rappelle les données du problème. *(écrit)* Donc on a considéré une fonction f définie sur un intervalle ab dans R. On a considéré des points d'interpolation tj équidistants, donc a plus b moins a, sur n fois j pour tous les j allant de zéro, un, deux jusqu'à n, donc ces tj sont équidistants. On a considéré le Pn, le polynôme de degré n qui coïncide avec la fonction f en ces points tj, donc Pn en tj est égal à f en tj, j allant de zéro, un, deux jusqu'à n. Donc Pn de t est une combinaison linéaire des fonctions phi 0, phi 1, phi n, qui sont la base de Lagrange des polynômes de degré n, associés à ces points t0, t1, tn. Donc Pn de t c'est f en t0, fois phi 0 de t, plus f en t1 fois phi 1 de t, plus, points de suspension, f en tn fois phi n de t. Donc encore une fois phi 0 phi 1 phi n, est la base de Lagrange des polynômes de degré n, associés à ces points t0, t1, t2, tn. L'hypothèse c'est que f est n plus 1 fois continument dérivable sur l'intervalle ab fermé.

Notes

Summary

0m 03s

Thm 1.1 : données $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$t_j = a + \frac{b-a}{n} j \quad j = 0, 1, 2, \dots, n$ équidistants

$p_n \in \mathbb{P}_n \quad p_n(t_j) = f(t_j) \quad j = 0, 1, \dots, n$

$p_n(t) = f(t_0)\varphi_0(t) + f(t_1)\varphi_1(t) + \dots + f(t_n)\varphi_n(t)$

hyp : $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$

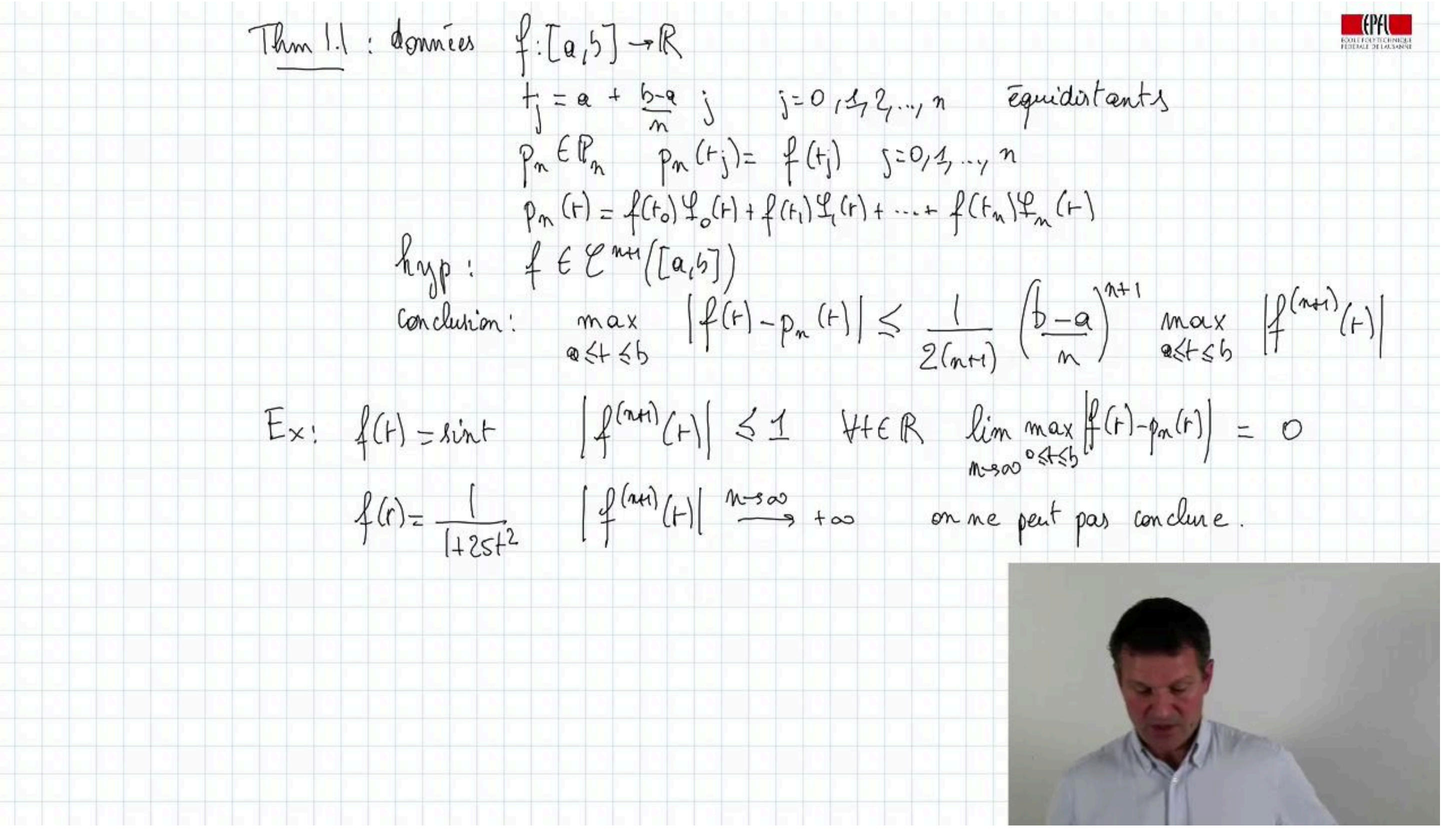
conclusion : $\max_{a \leq t \leq b} |f(t) - p_n(t)| \leq \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} \max_{a \leq t \leq b} |f^{(n+1)}(t)|$

Et la conclusion du théorème est la suivante : je m'intéresse à l'erreur, la différence entre la fonction f et le polynômes de degré n, Pn, donc l'interpolant de f associé aux points t0, t1, t2, tn équidistants. Donc je regarde cette erreur là, en tout point t et je regarde le maximum de l'erreur sur tout l'intervalle a b. Je prétend que cette erreur est majorée par un sur deux fois n plus un, ensuite vous avez un terme b moins a sur n élevé à la puissance n plus un, et finalement vous avez un terme qui fait intervenir la dérivée n plus-unième de la fonction t sur l'intervalle ab, donc je prends la valeur absolue et je regarde le maximum de cette quantité sur l'intervalle ab. Donc l'erreur entre le polynôme et la fonction f est majorée par un terme qui a priori tend vers zéro quand n tend vers l'infini et un autre terme qui fait intervenir les dérivées d'ordres de plus en plus élevés de la fonction f.

Notes

Summary

1m 48s



Donc deux situations qui correspondent aux deux situations que nous avons considérées dans l'applet Java, dans le cas où la fonction t est définie par sinus t, dans ce cas là j'affirme que toutes les dérivées de la fonction sinus sont majorées par un, où t est égal à un, donc ceci pour tout t dans l'intervalle ab ou dans R, donc ce que je prétends c'est que ici cette quantité là est majorée par a, cette quantité là tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, donc forcément on va avoir que la limite lorsque n tend vers l'infini de l'erreur entre la fonction f et le polynôme, je prend l'erreur et je regarde le maximum sur l'intervalle ab, et bien cette quantité là tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Par contre lorsque f de t est définie par exemple par un sur un plus 25 t carré, et bien je ne peux pas vous donner une formule explicite mais ce que j'observe c'est que la dérivée d'ordre n plus un de t tend vers plus l'infini lorsque n tend vers plus l’infini, donc vous avez ici un terme qui tend vers plus l'infini lorsque n tend vers plus l’infini, ici un terme qui tend vers zéro et on ne peut pas conclure. Par contre les essais numériques ont montré que le polynôme Pn s’éloigne de plus en plus de la fonction f.

Notes

Summary

3m 06s

Thm 1.1 : données $f:[a,b] \to \mathbb{R}$

$t_j = a + \frac{b-a}{n} j \quad j=0,1,2,\dots,n$ équidistants

$p_n \in \mathbb{P}_n \quad p_n(t_j) = f(t_j) \quad j=0,1,\dots,n$

$p_n(t) = f(t_0)\varphi_0(t) + f(t_1)\varphi_1(t) + \dots + f(t_n)\varphi_n(t)$

hyp : $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$

Conclusion : $$\max_{a \le t \le b} |f(t) - p_n(t)| \le \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} \max_{a \le t \le b} |f^{(n+1)}(t)|$$

Ex : $f(t) = \sin t \quad |f^{(n+1)}(t)| \le 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \to \infty} \max_{a \le t \le b} |f(t) - p_n(t)| = 0$

$f(t) = \frac{1}{1+25t^2} \quad |f^{(n+1)}(t)| \xrightarrow{n \to \infty} +\infty$ on ne peut pas conclure.

Conclusion :
- pas souhaitable pts équidistants $n \to \infty$
- points distribués de manière adéquate sur $[a,b]$
- interpolation par intervalles

En tout cas, le maximum de l'erreur tend vers l'infini quand n tend vers l'infini. La conclusion est que, a priori, il n'est pas souhaitable de prendre des points d'interpolation équidistants et de faire tendre n vers plus l'infini. C'est à dire de prendre des polynômes de degrés de plus en plus élevés. Par contre un remède possible serait de prendre des points qui sont distribués de manière adéquate sur l'intervalle ab et si vous faites des essais numériques avec l'applet, vous allez voir que plus vous mettez de points sur le bord, et mieux les choses se passent. L'autre possibilité c'est de faire ce que je vais faire maintenant dans la suite de ce cours, faire de l'interpolation par intervalle et c'est ce qui est fait dans les programmes d'éléments finis.

Notes

Summary

4m 48s