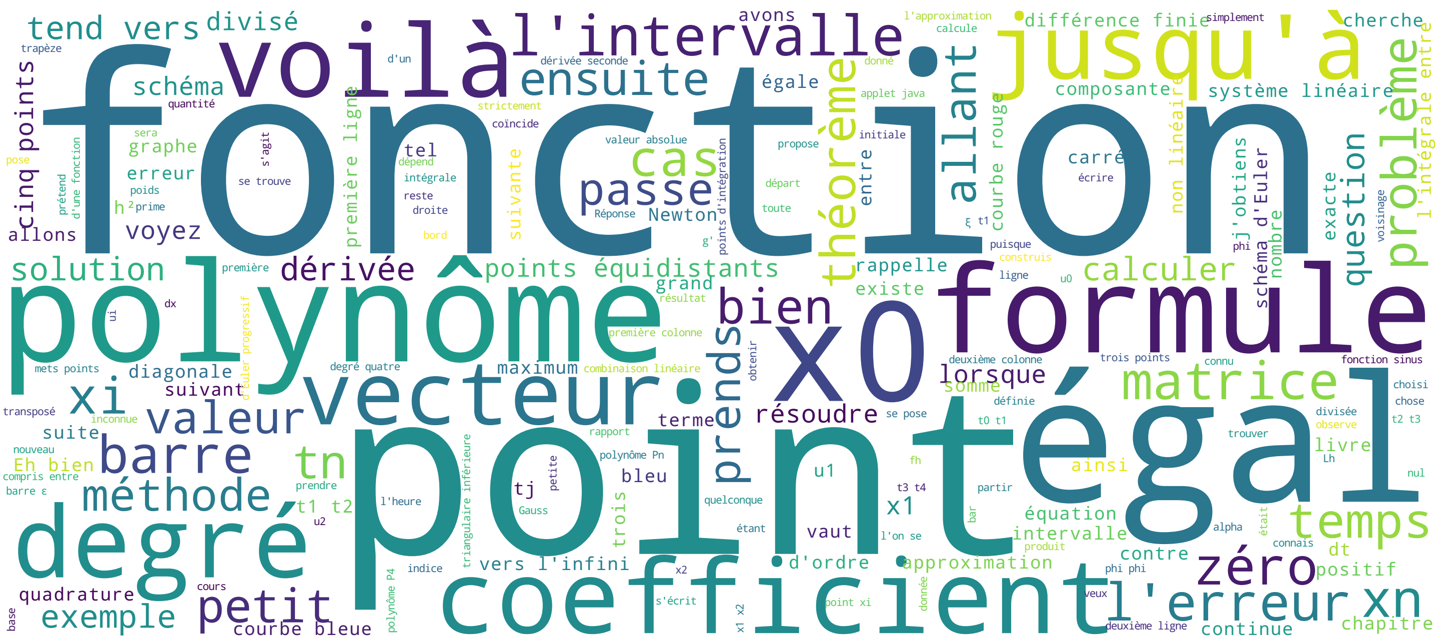
Interpolation d'une fonction continue

Introduction à l'analyse numérique

Prof. Marco Picasso



Search MOOC

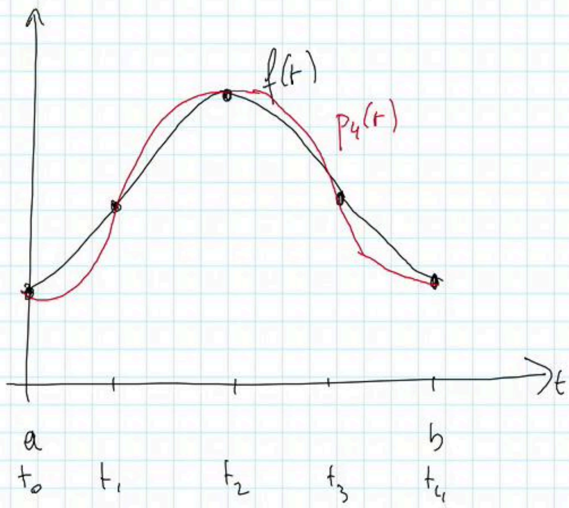
Video

Interpolation d'une fct continue par un polyn. (1.4 livre)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont.

$t_j = a + \frac{b-a}{n} j \quad j = 0, 1, \dots, n$

$p_n \in \mathbb{P}_n$ tq $p_n(t_j) = f(t_j)$ $j = 0, 1, .., n$



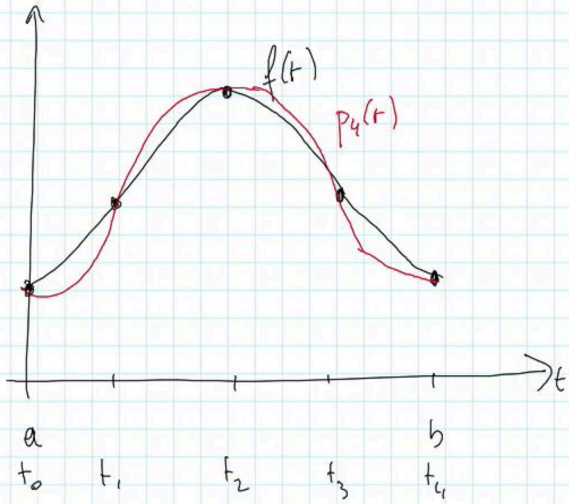
Voilà, maintenant je vais vous parler d'interpolation d'une fonction continue, continue par un polynôme. Donc il s'agit du paragraphe 1.4 du livre. Donc, je me donne une fonction f définie sur l'intervalle [a, b] dans R, qui est continue. Je choisis des points d'interpolation qui sont équidistants. Donc tj égal a plus b moins a sur n, fois j, pour tous les j allant de zéro, un, jusqu'à n. Donc voilà l'intervalle a, b. Je prends des points équidistants. Ici, t0, t1, t2, t3, t4. Ici cinq points équidistants. Je vais apprendre ici le graphe de la fonction f et je cherche le polynôme, donc j'ai cinq points, je cherche Pn, le polynôme de degré n, qui coïncide avec la fonction f en ces points tj équidistants, tels que Pn en tj soit égal à la fonction f en tj pour tous les j allant de zéro, un, jusqu'à n. Donc, voilà les valeurs f de t0, f de t1, f de t2, f de t3 et f de t4, et je vais maintenant représenter le polynôme P4 de degré quatre qui passe par ces cinq points. Donc admettons que voilà le polynôme P4 de t. Donc je rappelle, ce polynôme P4 est un polynôme de degré quatre et il coïncide avec la fonction f en ces points, t0, t1, t2, t3, t4, équidistants.

Notes

Summary

0m 03s

Interpolation d'une fct continue par un polyn. (1.4 livre)



$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont.

$t_j = a + \frac{b-a}{n} j \quad j = 0,1,\dots,n$

$p_n \in \mathbb{P}_n$ tq $p_n(t_j) = f(t_j)$ $j = 0,1,..,n$

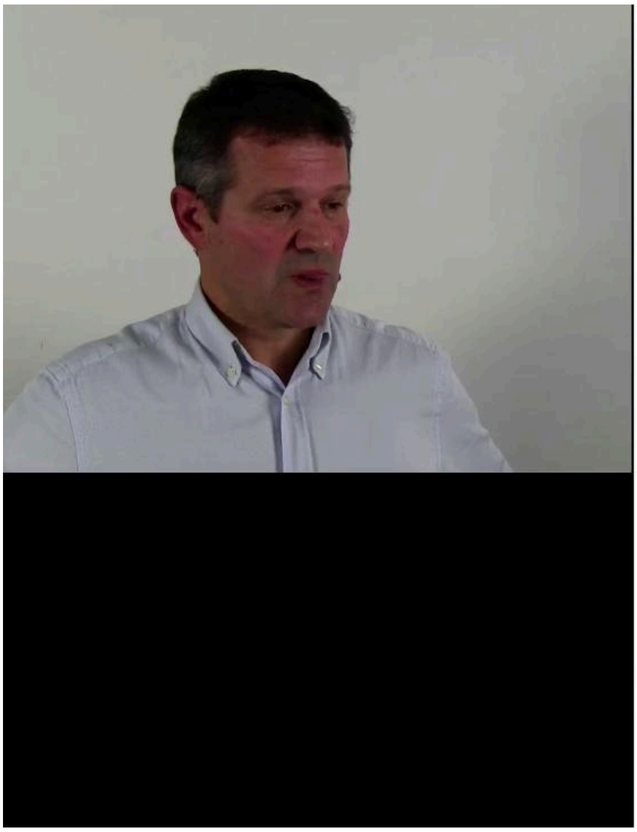
Question : $p_n \xrightarrow{n \to \infty} f$?

Et la question que l'on se pose est la suivante : est-ce que Pn, lorsque j'augmente le nombre de points, lorsque n tend vers l'infini, est-ce que ce polynôme Pn s'approche de plus en plus de la fonction f? et je vous propose de faire une expérience numérique avec une petite applet java.

Notes

Summary

2m 06s

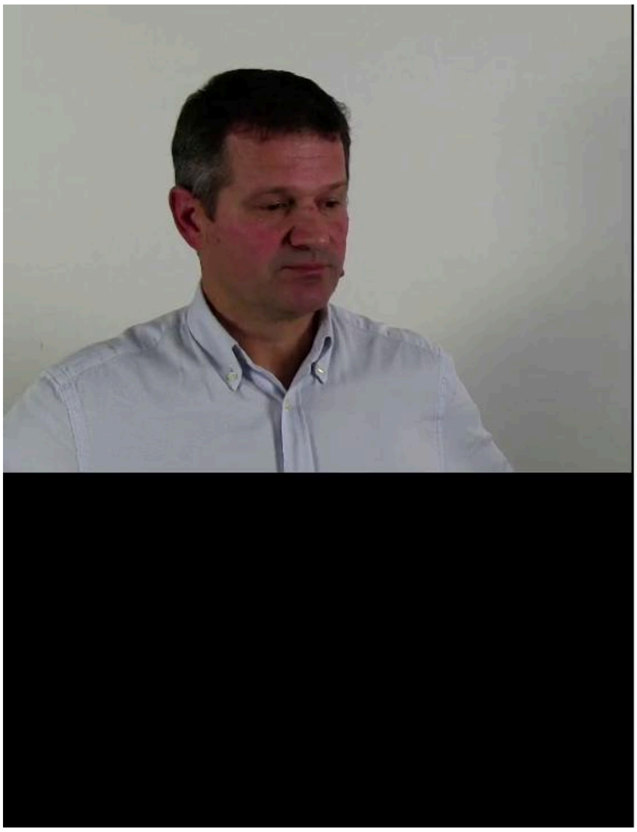


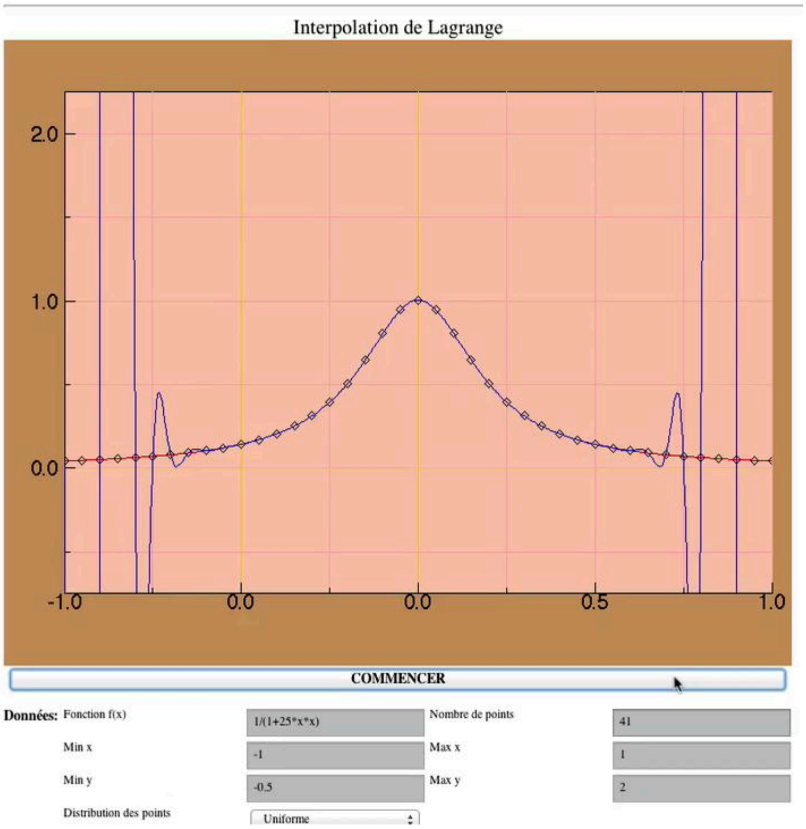
Donc sur cette applet java vous voyez le graphe de la fonction f en bleu, en rouge pardon, donc c'est la fonction f qui est définie par f de t égal 1 sur 1 plus 25 t carré, sur l'intervalle -1, 1. Et puis, ce que vous observez ici en bleu, c'est le polynôme de degré quatre qui passe par cinq points équidistants. Donc en bleu, vous voyez sur ces cinq points, le polynôme et la fonction coïncident. Donc la question que l'on se pose est : lorsqu'on augmente le nombre de points, est-ce que la courbe bleue va se rapprocher de la courbe rouge ? Alors allons-y. Je mets, cette fois-ci, 11 points. Alors on observe que la courbe bleue au centre se rapproche de la courbe rouge, par contre, sur les bords, elle s'en éloigne. Donc continuons, au lieu de prendre 11 points, je prends 21 points et donc je construis le polynôme de degré 20 qui passe par ces 21 points et même constatation, au centre, la courbe bleue et la courbe rouge sont pratiquement confondues, mais sur les bords de l'intervalle -1, 1, la courbe bleue s'éloigne de plus en plus de la courbe rouge, c'est-à-dire Pn s'éloigne de plus en plus de f, et si je continue avec cette fois-ci 41 points, donc je construis le polynôme de degré 40 qui passe par ces 41 points, alors là, j'observe que la tendance est encore plus forte.

Notes

Summary

2m 28s



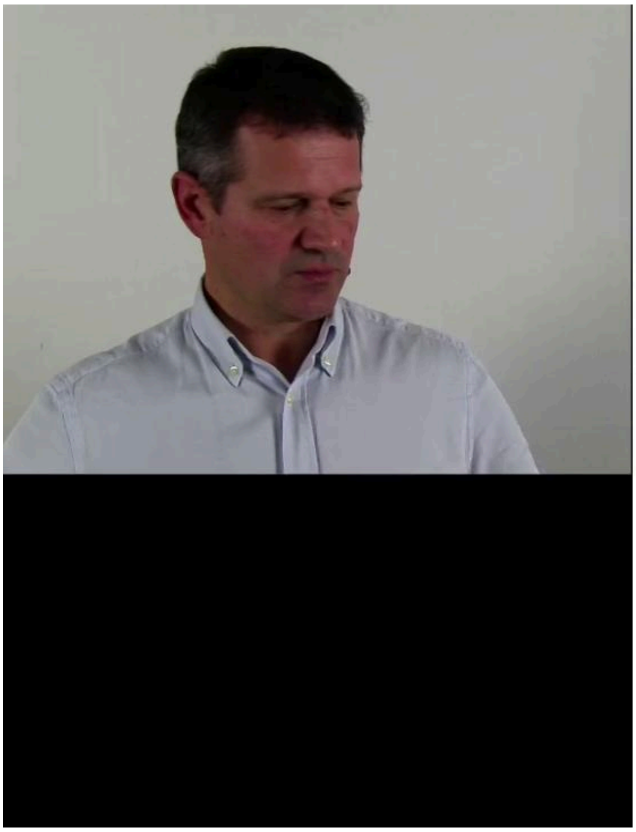


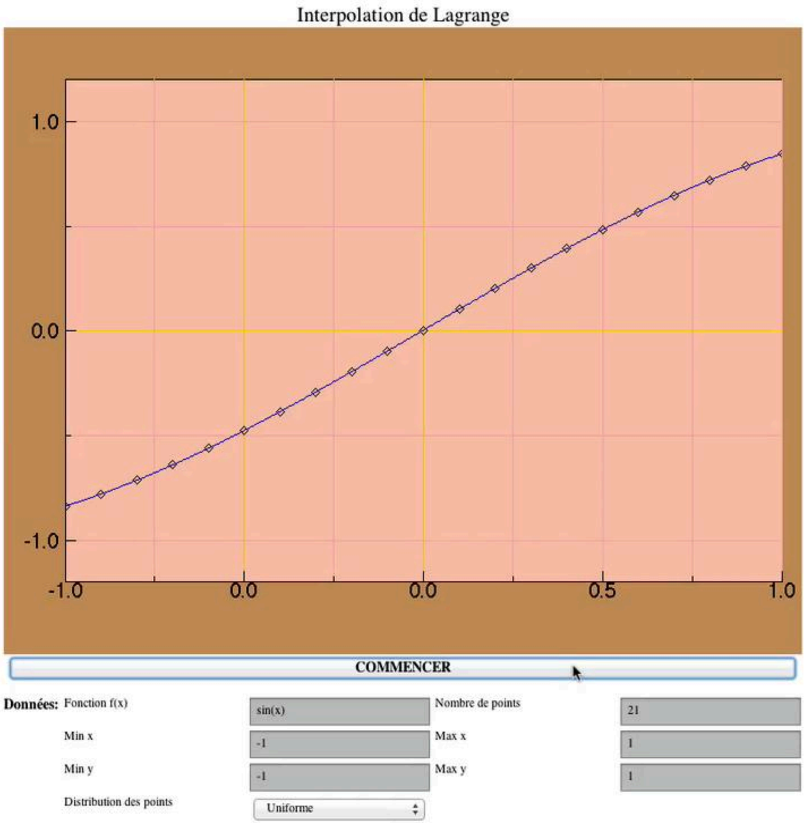
Donc le polynôme P40 et la fonction f sont proches l'un de l'autre au voisinage de zéro, par contre ils s'éloignent de plus en plus lorsqu'on s'approche de -1 ou de 1.

Notes

Summary

3m 53s





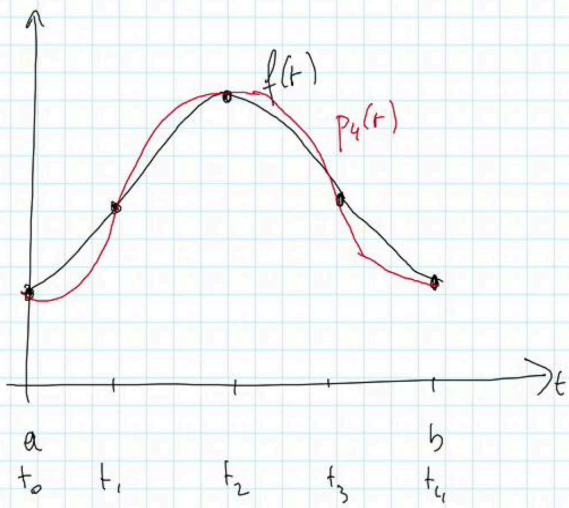
Donc je recommence cette fois-ci l'expérience avec la fonction sinus sur l'intervalle -1,1. Donc en rouge, la fonction sinus et en bleu, le polynôme de degré deux qui passe par trois points équidistants. Donc vous voyez qu'il y a une légère différence entre le polynôme et la fonction de départ, la fonction sinus. Je place cinq points équidistants. Les courbes rouges et les courbes bleues sont maintenant confondues. Je mets 11 points, on ne voit pas de différence. Je mets 21 points et je ne vois plus aucune différence à l’œil nu.

Notes

Summary

4m 10s

Interpolation d'une fct continue par un polyn. (1.4 livre)



$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont.

$t_j = a + \frac{b-a}{n}\, j \qquad j = 0, 1, \dots, n$

$p_n \in \mathbb{P}_n$ tq $\quad p_n(t_j) = f(t_j) \quad j = 0, 1, \dots, n$

Question : $p_n \xrightarrow{n\to\infty} f$?

Réponse : ça dépend de f ....

Donc à la question est-ce que le polynôme Pn converge vers la fonction f lorsque n tend vers l'infini, c'est-à-dire lorsque je prends de plus en plus de points équidistants. Eh bien, je réponds que -- Réponse, donc observation numérique. Eh bien, ça dépend principalement de la fonction f. Donc ce que je vous propose maintenant, c'est un théorème pour permettre de conclure dans un certain nombre de cas.

Notes

Summary

4m 48s