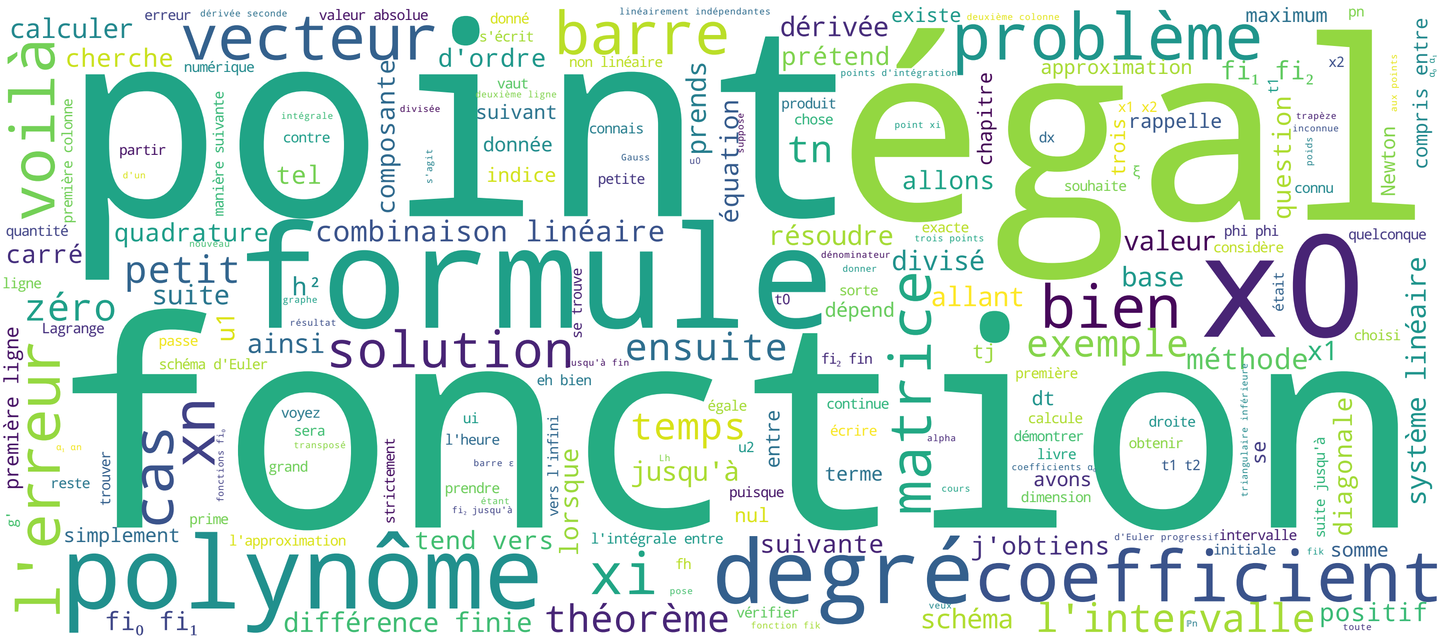
Interpolation de Lagrange – cas n quelconque

Introduction à l'analyse numérique
Prof. Marco Picasso



Search MOOC

Video

EPFL

n qque : $\varphi_0\ \varphi_1\ \varphi_2 \dots \varphi_n$ base de Lagrange de $\mathbb{P}_n$ ass. aux pts $t_0\ t_1\ t_2 \dots t_n$

$0 \leq k \leq n$ fixé $\quad \varphi_k \in \mathbb{P}_n \quad \varphi_k(t_k) = 1 \quad \varphi_k(t_j) = 0 \quad j \neq k$

$$\varphi_k(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{t - t_j}{t_k - t_j}$$

$\varphi_0\ \varphi_1\ \varphi_2 \dots \varphi_n$ base de $\mathbb{P}_n$: $\dim \mathbb{P}_n = n+1$

Nous allons maintenant résoudre le problème dans le cas "n" quelconque. Donc la première chose est d'introduire fi$_0$, fi$_1$, fi$_2$... jusqu'à fin qui est la base de Lagrange, des polynômes de degré n, de ℙn qui est bien sûr, qui dépend, qui est associé aux points t$_0$, t$_1$, t$_2$... jusqu'à tn Donc si je prends un entier k compris entre 0 et n, k "fixé", et bien la fonction fik est un polynôme de degré n qui est défini de la manière suivante : Je souhaite que fik en tk = 1 et je souhaite que fik en tous les autres points t(j) = 0 donc pour tous les indices j ≠ k, j compris entre 0 et n. Donc la formule pour cette fonction fik est la suivante : fik de t, c'est le produit sur tous les indices j allant de 0 à n, (j ≠ k) Vous avez au numérateur des monômes du type t - tj de sorte que fik (tj) soit nul, et au dénominateur vous avez tk - tj, de sorte que fik(tk) = 1. Alors je prétends maintenant que fi$_0$, fi$_1$, fi$_2$...jusqu'à fin est une base des polynômes de degré n En effet, la dimension de l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n = n+1 tout simplement parce que un polynôme degré n s'écrit comme une combinaison linéaire des fonctions 1, t, t^2...t^n Donc y a n plus une fonction de base, la dimension de ℙn c'est n+1.

Notes

Summary

0m 03s

n qque : $\varphi_0\, \varphi_1\, \varphi_2 \dots \varphi_n$ base de Lagrange de $\mathbb{P}_n$ ass. aux pts $t_0\, t_1\, t_2 \dots t_n$

$0 \le k \le n$ fixé $\quad \varphi_k \in \mathbb{P}_n \quad \varphi_k(t_k) = 1 \quad \varphi_k(t_j) = 0 \quad j \neq k$

$$\varphi_k(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{t - t_j}{t_k - t_j}$$

$\varphi_0\, \varphi_1\, \varphi_2 \dots \varphi_n$ base de $\mathbb{P}_n$: $\dim \mathbb{P}_n = n+1$

linéairement indép.

$$\alpha_0 \varphi_0(t) + \alpha_1 \varphi_1(t) + \dots + \alpha_n \varphi_n(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot 0 + \dots + \alpha_n \cdot 0 = 0 \quad t = t_0$$

Solution du pbm : $p(t) = p_0 \varphi_0(t) + p_1 \varphi_1(t) + \dots + p_n \varphi_n(t) \in \mathbb{P}_n$

Et donc il me reste à vérifier que ces fonctions fi_0, fi_1, fi_2...fin sont linéairement indépendantes. Donc je considère des coefficients α_0, α_1, αn quelconques. Et une combinaison linéaire $\alpha_0 fi_0$ + $\alpha_1 fi_1$ +... αnfin Je suppose que cette combinaison linéaire est nulle, donc pour tout t dans ℝ, ici, et je dois démontrer que ceci implique que tous les coefficients α_0,α_1,αn sont nuls. Donc je choisi, ici par exemple, t = t_0 et j'obtiens $\alpha_0 fi_0(t_0)$ = 1 + $\alpha_1 fi_1(t_0)$ = 0 +...αnfin(t_0) = 0 Donc j'obtiens, ici, α_0 = 0 De même si je choisis t = t_1 j'obtiens α_1 = 0 et ainsi de suite. Donc j'ai bien démontré que ces fonctions sont linéairement indépendantes. Reste maintenant à vous donner la solution du problème. Donc "Solution du problème". Donc je vous rappelle je cherche un polynôme de degré n qui passe par les points $t_0 p_0$, $t_1 p_1$... jusqu'à tnpn Et je prétends que la solution du problème est donnée par p (t). Alors p est un polynôme de degré n il peut donc s'écrire comme combinaison linéaire de ses fonctions de base fi_0, fi_1, fi_2...fin et les coefficients de la combinaison linéaire sont justement les valeurs p_0, p_1,... pn. Donc p de t c'est $p_0 fi_0$(t) + $p_1 fi_1$(t) +...pnfin(t) Alors on peut effectivement vérifier que c'est bien la solution du problème.

Notes

Summary

2m 24s

n qque : $\varphi_0\, \varphi_1\, \varphi_2 \dots \varphi_n$ base de Lagrange de $\mathbb{P}_n$ ass. aux pts $t_0\, t_1\, t_2 \dots t_n$

$0 \leq k \leq n$ fixé $\quad \varphi_k \in \mathbb{P}_n \quad \varphi_k(t_k) = 1 \quad \varphi_k(t_j) = 0 \quad j \neq k$

$$\varphi_k(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{t - t_j}{t_k - t_j}$$

$\varphi_0\, \varphi_1\, \varphi_2 \dots \varphi_n$ base de $\mathbb{P}_n$: $\dim \mathbb{P}_n = n+1$

linéairement indép.

$$\alpha_0 \varphi_0(t) + \alpha_1 \varphi_1(t) + \dots + \alpha_n \varphi_n(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot 0 + \dots + \alpha_n \cdot 0 = 0 \quad t = t_0$$

Solution du pbm : $p(t) = p_0 \varphi_0(t) + p_1 \varphi_1(t) + \dots + p_n \varphi_n(t) \in \mathbb{P}_n$

$$p(t_0) = p_0 \cdot 1 + p_1 \cdot 0 + \dots + p_n \cdot 0$$

$\vdots$

Premièrement, ce polynôme est une combinaison linéaire des fonctions fi$_0$, fi$_1$, fi$_2$... fin de la base de Lagrange. C'est donc un polynôme de degré n. Et je dois vérifier que p(tj) = pj. Donc p(t$_0$) c'est p$_0$fi$_0$ (t$_0$) (mais fi$_0$ (t$_0$) = 1). + p$_1$fi$_1$ (t$_0$) = 0 +... pnfin (t$_0$) = 0 Donc vous avez bien p(t$_0$) = p$_0$ et ainsi de suite jusqu'à p(tn) qui doit être égal à pn

Notes

Summary

4m 21s