Interpolation de Lagrange – cas n=2

Introduction à l'analyse numérique

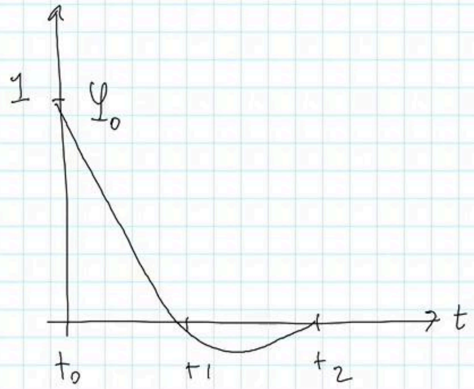
Prof. Marco Picasso

Search MOOC

Video

$n = 2 : \quad t_0 \; t_1 \; t_2 \qquad \varphi_0 \varphi_1 \varphi_2$ base de Lagrange de $\mathbb{P}_2$ associée aux pts $t_0 \, t_1 \, t_2$

$\varphi_0 \varphi_1 \varphi_2 \in \mathbb{P}_2$



$\varphi_0 \in \mathbb{P}_2 \quad \varphi_0(t_0) = 1 \quad \varphi_0(t_1) = 0 \quad \varphi_0(t_2) = 0$

$$\varphi_0(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)}$$

$\varphi_1 \in \mathbb{P}_2 \quad \varphi_1(t_0) = 0 \quad \varphi_1(t_1) = 1 \quad \varphi_1(t_2) = 0$

Voilà, maintenant je vais résoudre le problème dans le cas où n égal deux. Donc, je vous rappelle que je me suis donné trois valeurs, t0, t1, t2, distinctes, et à partir de ces trois valeurs, je vais construire phi 0, phi 1, phi 2, qui est la base de Lagrange, des polynômes de degrés deux, de P2, qui est associée aux points t0, t1, t2. Donc, le premier polynôme-- Alors ces trois fonctions, phi 0, phi 1, phi 2, sont trois polynômes de degré deux qui sont construits de la manière suivante : Donc le premier, donc voilà t, donc t0, t1, t2, je place ici 1. Donc le premier polynôme, phi 0. Phi 0 est un polynôme de degré deux tel que phi 0 en t0 doit valoir 1, phi 0 en t1 doit valoir 0 et phi 0 en t2 doit également valoir 0. Donc voici le polynôme phi 0 en question, et on peut même expliciter le polynôme phi 0 puisque le polynôme vaut 0 en t1 et t2, il s'écrit sous la forme du produit t moins t1, fois t moins t2, et maintenant je souhaite que le polynôme vaille 1 en t0 et donc je divise par t0 moins t1, fois t0 moins t2. Donc voici le polynôme phi 0. De même, je peux construire le polynôme phi 1, le polynôme de degré deux tel que phi 1, en t0 cette fois-ci, vaut 0, phi 1 en t1 maintenant doit valoir 1, et phi 1 en t2 doit valoir 0.

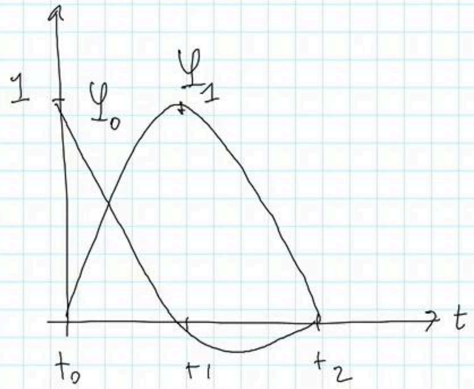
Notes

Summary

0m 03s

$n=2$: $t_0\ t_1\ t_2$ $\quad \varphi_0\, \varphi_1\, \varphi_2$ base de Lagrange de $\mathbb{P}_2$ associée aux pts $t_0\ t_1\ t_2$

$\varphi_0\, \varphi_1\, \varphi_2 \in \mathbb{P}_2$



$\varphi_0 \in \mathbb{P}_2 \quad \varphi_0(t_0)=1 \quad \varphi_0(t_1)=0 \quad \varphi_0(t_2)=0$

$$\varphi_0(t)=\frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)}$$

$\varphi_1 \in \mathbb{P}_2 \quad \varphi_1(t_0)=0 \quad \varphi_1(t_1)=1 \quad \varphi_1(t_2)=0$

$$\varphi_1(t)=\frac{(t-t_0)(t-t_2)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)}$$

$\varphi_2 \in \mathbb{P}_2 \quad \varphi_2(t_0)=0 \quad \varphi_2(t_1)=0 \quad \varphi_2(t_2)=1$

$\varphi_0\, \varphi_1\, \varphi_2$ base de $\mathbb{P}_2$: dim $\mathbb{P}_2 = 3$ $\quad p(t) \in \mathbb{P}_2 \quad p(t)=a_0+a_1 t+a_2 t^2$

linéairement indép :

Donc voici le polynôme en question. Zéro, un, zéro, voici le polynôme phi 1. Et bien évidemment, je peux expliciter le polynôme phi 1 : c'est t moins t0, fois t moins t2, de sorte que ce polynôme vaille 0 en t0 et en t2. Et maintenant je souhaite qu'il vaille 1 en t1 et donc je vais diviser par t1 moins t0, fois t1 moins t2. Et finalement, je peux construire le polynôme phi 2 de degré deux qui vaut 0 en t0, 0 en t1 et 1 en t2, et vous avez également une formule analogue. Alors maintenant je prétends que les trois fonctions, phi 0, phi 1 et phi 2, forment une base de l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à deux. En effet, on a trois fonctions qui appartiennent à P2, qui sont des polynômes de degré deux. La dimension de l'espace des polynômes de degré deux est trois. Pourquoi trois ? Parce que si P est un polynôme de degré deux, eh bien, je vais l'écrire sous la forme : a0, plus a1t, plus a2t au carré. Et donc un t t carré est la base canonique des polynômes de degré deux. Il y a trois éléments dans cette base et donc la dimension de P2 c'est trois. Donc la seule chose à vérifier pour que phi 0, phi 1, phi 2 soient une base, c'est de vérifier que ces fonctions phi 0, phi 1, phi 2, sont linéairement indépendantes.

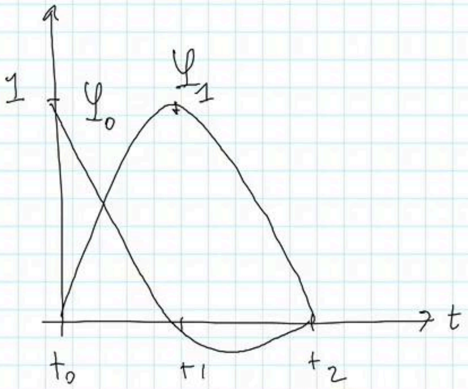
Notes

Summary

2m 03s

$n=2$: $t_0\ t_1\ t_2$ $\qquad$ $\varphi_0 \varphi_1 \varphi_2$ base de Lagrange de $\mathbb{P}_2$ associée aux pts $t_0\ t_1\ t_2$

$\varphi_0\ \varphi_1\ \varphi_2 \in \mathbb{P}_2$



$\varphi_0 \in \mathbb{P}_2$ $\quad \varphi_0(t_0)=1 \quad \varphi_0(t_1)=0 \quad \varphi_0(t_2)=0$

$$\varphi_0(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)}$$

$\varphi_1 \in \mathbb{P}_2$ $\quad \varphi_1(t_0)=0 \quad \varphi_1(t_1)=1 \quad \varphi_1(t_2)=0$

$$\varphi_1(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_2)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)}$$

$\varphi_2 \in \mathbb{P}_2$ $\quad \varphi_2(t_0)=0 \quad \varphi_2(t_1)=0 \quad \varphi_2(t_2)=1$

$\underline{\varphi_0\ \varphi_1\ \varphi_2}$ base de $\mathbb{P}_2$: dim $\mathbb{P}_2 = 3$ $\quad p(t)\in\mathbb{P}_2$ $\quad p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2$

linéairement indép : $\left(\alpha_0\varphi_0(t)+\alpha_1\varphi_1(t)+\alpha_2\varphi_2(t)=0 \quad \forall t\in\mathbb{R}\right) \Rightarrow \left(\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=0\right.$

$p\in\mathbb{P}_2$: $p(t)=\alpha_0\varphi_0(t)+\alpha_1\varphi_1(t)+\alpha_2\varphi_2(t)$

Solution du pbm : $p(t) = p_0$

Donc je prends trois coefficients, alpha 0, alpha 1, alpha 2. Je construis la combinaison linéaire alpha 0 phi 0, plus alpha 1 phi 1, plus alpha 2 phi 2 de t. Je suppose que ceci est zéro, cette combinaison linéaire est zéro pour tout t, et je dois montrer que ceci implique que les trois coefficients de la combinaison linéaire, alpha 0, alpha 1 et alpha 2, sont nuls. Alors, comment démontre-t-on ce résultat ? Il suffit de prendre ici t égal t1 pour obtenir que alpha 0 est nul. Excusez-moi, t égal t0 pour obtenir que alpha 0 est nul, t égal t1 pour obtenir que alpha 1 est nul, et t égal t2 pour obtenir que alpha 2 est nul. Donc ces trois fonctions sont linéairement indépendantes. Ceci veut dire que si P est un polynôme de degré deux, eh bien, je peux écrire P de t comme une combinaison linéaire alpha 0 de ces trois fonctions, phi 0, phi 1, phi 2. Donc, alpha 0 phi 0 de t, plus alpha 1 phi 1 de t, plus alpha 2 phi 2 de t. Et maintenant, je vais vous donner la solution du problème. Solution du problème. Donc, je vous rappelle que je cherche P1, polynôme de degré deux qui passe par les points t0 P0, t1 P1, t2 P2, et la solution du problème est simplement une combinaison linéaire de ces fonctions, phi 0, phi 1, phi 2, et les coefficients de la combinaison linéaire sont justement les coefficients P0, P1, P2.

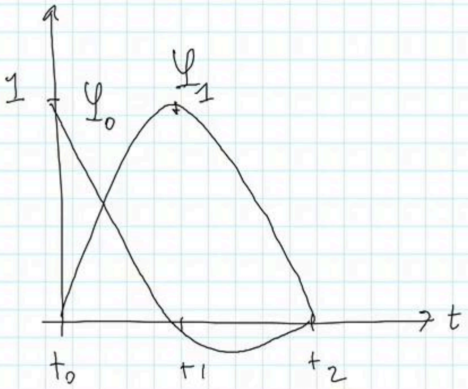
Notes

Summary

3m 51s

$n=2$: $t_0 \quad t_1 \quad t_2$ $\qquad \varphi_0\, \varphi_1\, \varphi_2$ base de Lagrange de $\mathbb{P}_2$ associée aux pts $t_0\ t_1\ t_2$

$\varphi_0\, \varphi_1\, \varphi_2 \in \mathbb{P}_2$



$\varphi_0 \in \mathbb{P}_2 \quad \varphi_0(t_0)=1 \quad \varphi_0(t_1)=0 \quad \varphi_0(t_2)=0$

$$\varphi_0(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)}$$

$\varphi_1 \in \mathbb{P}_2 \quad \varphi_1(t_0)=0 \quad \varphi_1(t_1)=1 \quad \varphi_1(t_2)=0$

$$\varphi_1(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_2)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)}$$

$\varphi_2 \in \mathbb{P}_2 \quad \varphi_2(t_0)=0 \quad \varphi_2(t_1)=0 \quad \varphi_2(t_2)=1$

$\varphi_0\, \varphi_1\, \varphi_2$ base de $\mathbb{P}_2$: dim $\mathbb{P}_2 = 3 \quad p(t)\in\mathbb{P}_2 \quad p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$

linéairement indép : $\left(\alpha_0\varphi_0(t) + \alpha_1\varphi_1(t) + \alpha_2\varphi_2(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}\right) \Rightarrow \left(\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0\right)$

$p \in \mathbb{P}_2$: $p(t) = \alpha_0\varphi_0(t) + \alpha_1\varphi_1(t) + \alpha_2\varphi_2(t)$

Solution du pbm : $p(t) = p_0\varphi_0(t) + p_1\varphi_1(t) + p_2\varphi_2(t) \quad \in \mathbb{P}_2$

$p(t_0) = p_0 \cdot 1 \quad + p_1 \cdot 0 \quad +$

Donc, P de t c'est P0 phi 0 de t, plus P1 phi 1 de t, plus P2 phi 2 de t. Alors en effet, on peut vérifier facilement que ce polynôme est bien la solution de mon problème. Donc P est bien polynôme de degré deux puisque c'est une combinaison linéaire de ces trois fonctions, phi 0, phi 1, phi 2. Et puis, on peut vérifier par exemple que P en t0 vaut bien P0. Pourquoi ? Parce que phi 0 en t0 vaut 1. Et puis ensuite, vous avez le P2 fois phi 1 en t0 qui vaut 0, et P1, ici, fois 0 et P2 fois phi 2 en t0 qui vaut, lui aussi, 0. Donc vous avez bien P en t0 qui vaut P0. De même, P1 en t1 vaut P1, et P1 en t2 vaut P2.

Notes

Summary

5m 37s