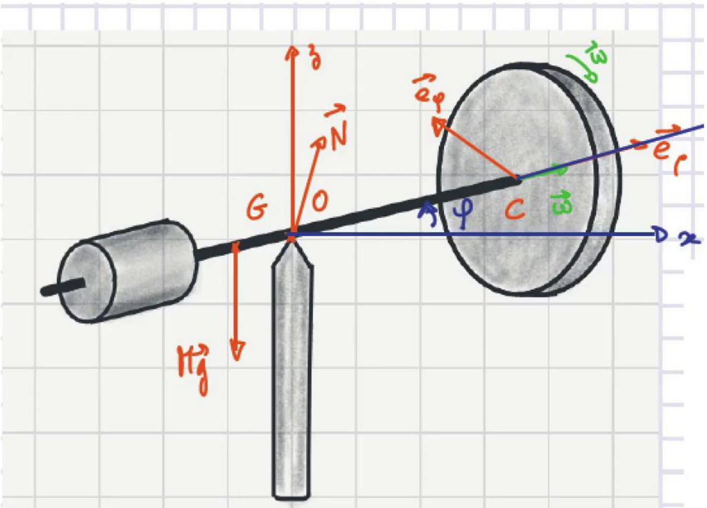
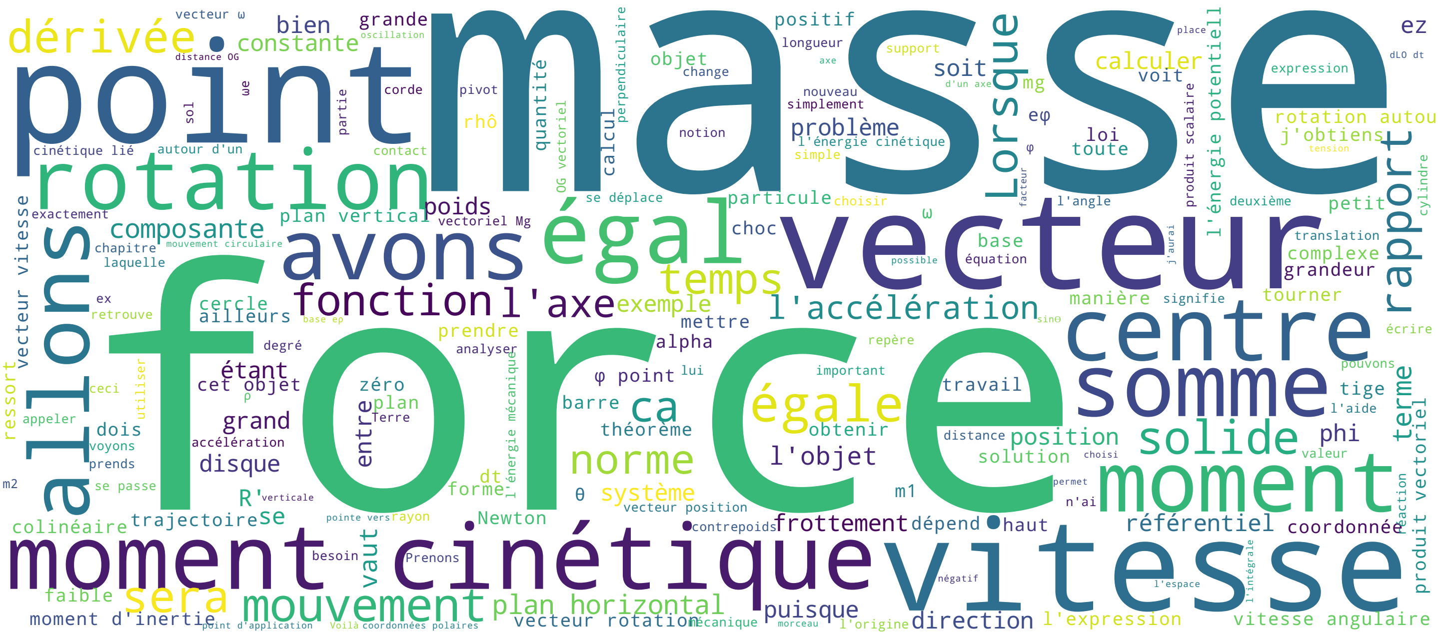


Application: Gyroscope

Prof. Cécile Hébert



Video

EPFL

Dans cette vidéo, nous allons utiliser ce que nous avons appris en mécanique du solide pour analyser le mouvement gyroscopique. Cela nous permettra de comprendre pourquoi un gyroscope déséquilibré se met à précesser autour d'un axe vertical.

Notes

Summary

0m 05s

Plan du cours

I - Cinématique
II - Référentiel accélérés
III - Lois de Newton
IV - Balistique – effet d'une force constante et uniforme
V - Forces ; application des lois de Newton
VI - Travail, Energie, principes de conservation
VII - Chocs, systèmes de masse variable
VIII - Oscillateur harmonique
IX - Moment cinétique ; Gravitation
X - Solide indéformable
XI - Application du solide indéformable

2

Notes

Summary

0m 24s

Table des matières

XI-1. Chute d'une barre et pendule physique
XI-2. Mouvement gyroscopique

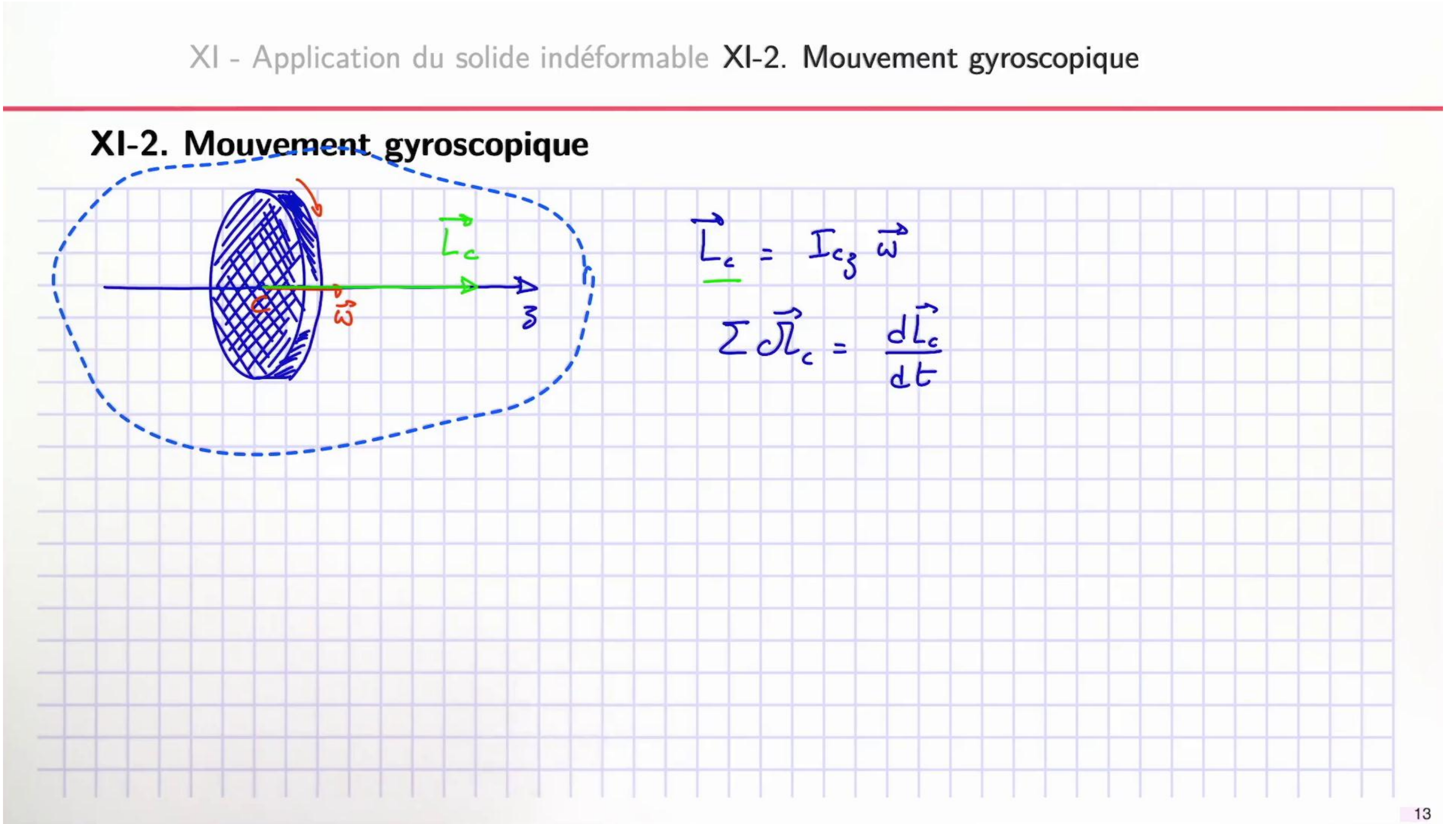
3

Nous sommes dans le chapitre XI : Application du solide indéformable, et nous allons voir XI-2, le mouvement gyroscopique.

Notes

Summary

0m 24s

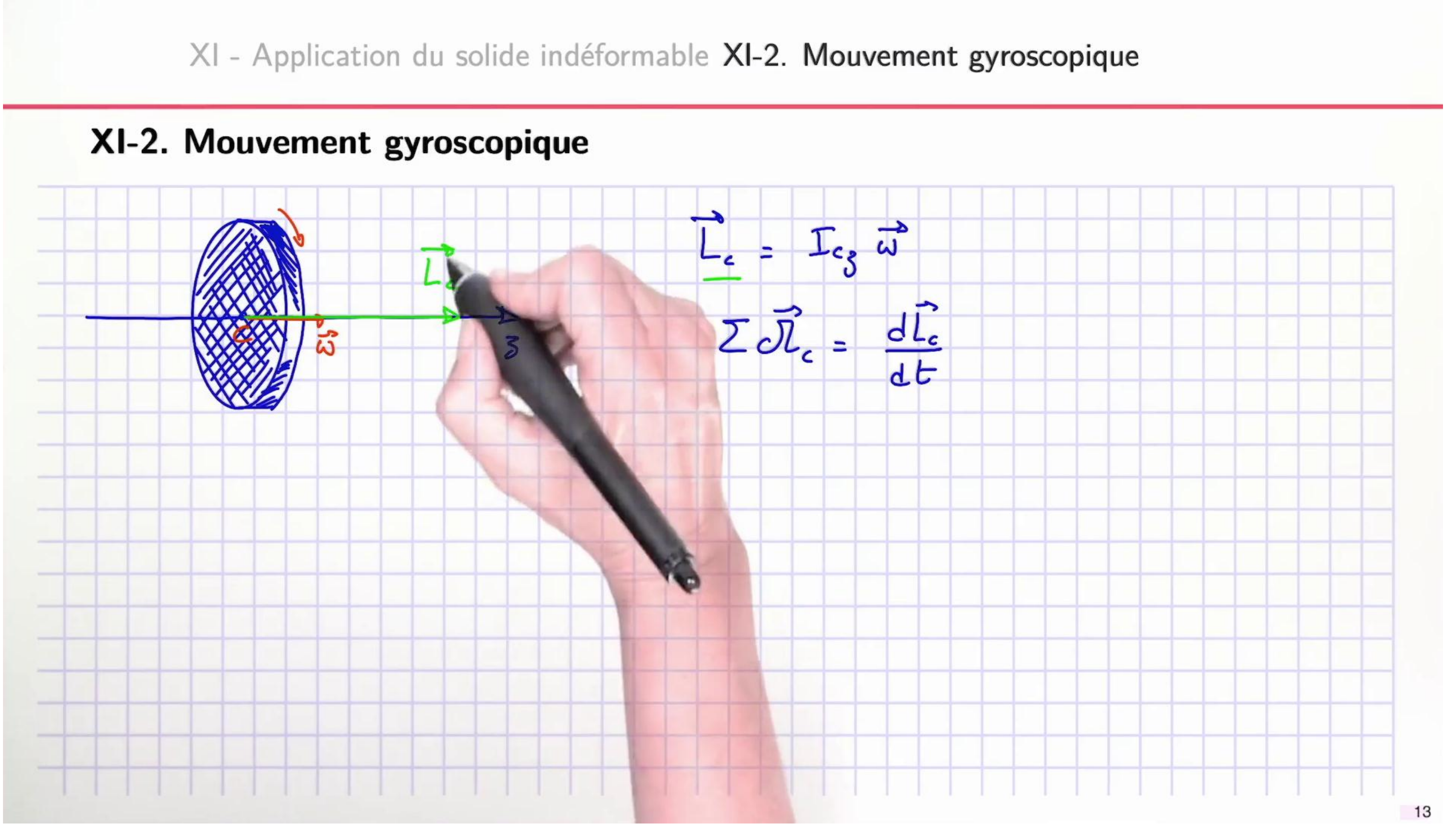


Nous allons nous intéresser à un solide auquel on a communiqué un mouvement de rotation autour d'un axe principal d'inertie. Par exemple, nous prenons un disque plein. Je vais mettre ce solide en rotation autour d'un axe passant par son centre C, qui est l'axe de symétrie du disque plat. Je vais appeler cet axe Cz. C le centre du disque et z l'axe. Je le mets en rotation de telle manière que le vecteur ω pointe vers les z positifs. J'ai donc un vecteur ω selon Cz. Dans ce cas-là, le moment cinétique par rapport à C sera égal à Icz, vecteur ω. Lorsque je choisis un disque lourd avec un moment d'inertie important et que je le fais tourner rapidement, donc la norme de ω est grande, je vais avoir le vecteur LC qui aura une norme importante. C étant le centre de masse, je peux écrire que la somme des moments des forces par rapport à C est égale à dLC/dt. Lorsque je prends cet objet et que je le déplace de manière à conserver son axe de rotation toujours parallèle à lui-même, on voit que le vecteur LC ne change pas puisque sa norme reste constante et sa direction reste constante. Dans ce cas-là, dLC/dt vaut 0 et je n'ai pas besoin d'exercer de moment.

Notes

Summary

0m 34s

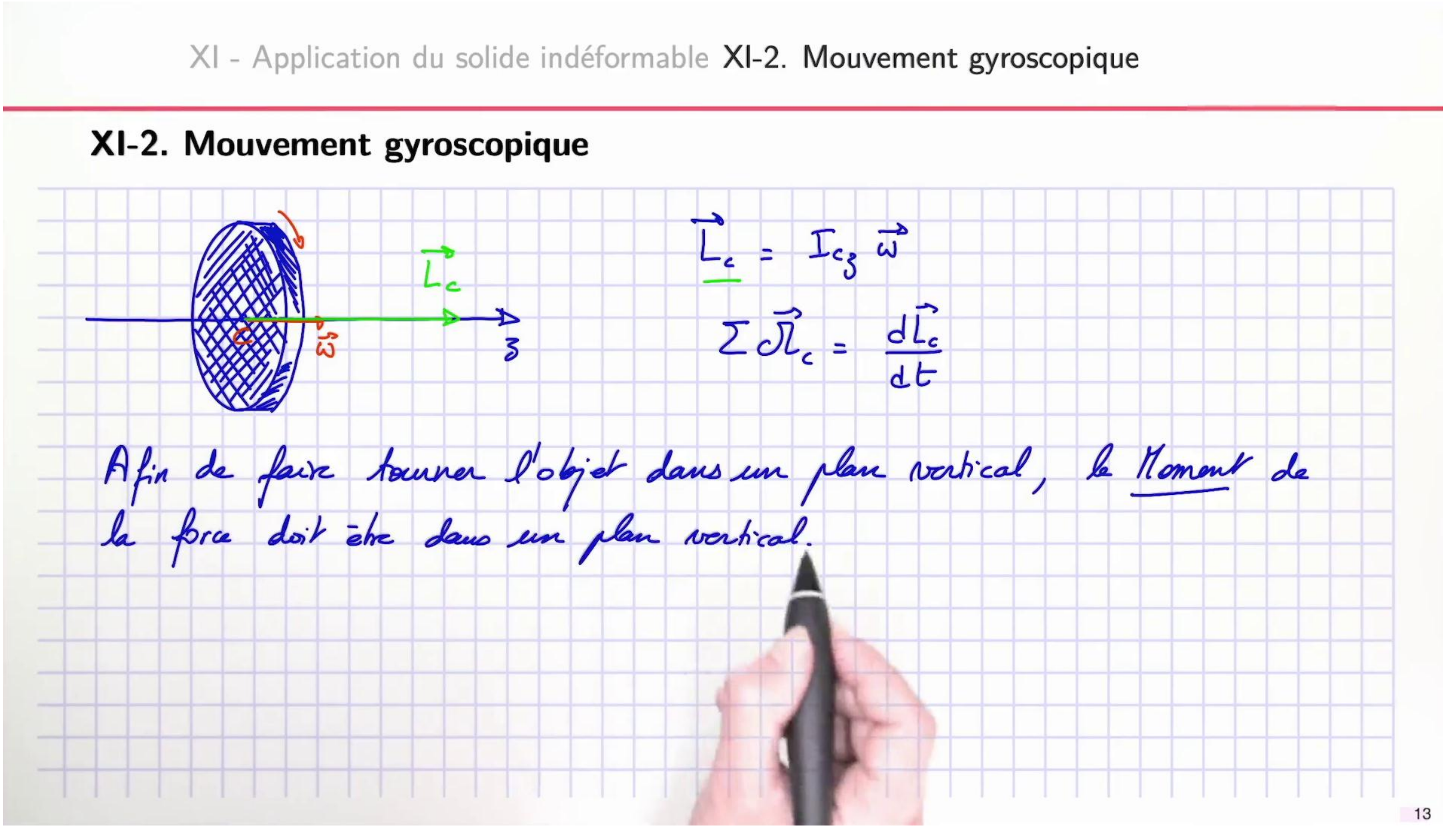


En revanche, si j'essaye non plus de le déplacer, mais de faire tourner cet objet dans l'espace. À ce moment-là, le vecteur LC change de direction. Il n'est donc plus un vecteur constant. dLC/dt sera non nulle. La somme des moments des forces sera non nulle. Je devrais donc exercer un moment afin de faire tourner l'objet. Maintenant, si expérimentalement vous essayez de prendre un tel objet et de le faire tourner dans une direction, vous exercez donc des forces pour lesquelles vous avez l'impression que vous allez forcer l'objet, par exemple, à monter le nez. Vous allez remarquer qu'au lieu de réagir comme vous vous y attendez, cet objet se met à tourner dans un plan perpendiculaire à la direction dans laquelle vous pensez le faire tourner. Il a donc un comportement qui semble, à première vue, complètement contre intuitif. Une analyse conceptuelle de ce comportement nous demande de regarder comment se comporte le vecteur moment cinétique et à quoi ressemble le moment des forces exercées. Le problème est le suivant. Si nous voulons faire monter le nez du vecteur moment cinétique, nous allons le faire tourner dans un plan vertical. Cela met une variation du vecteur moment cinétique, donc un dLC, dans un plan vertical.

Notes

Summary

2m 28s

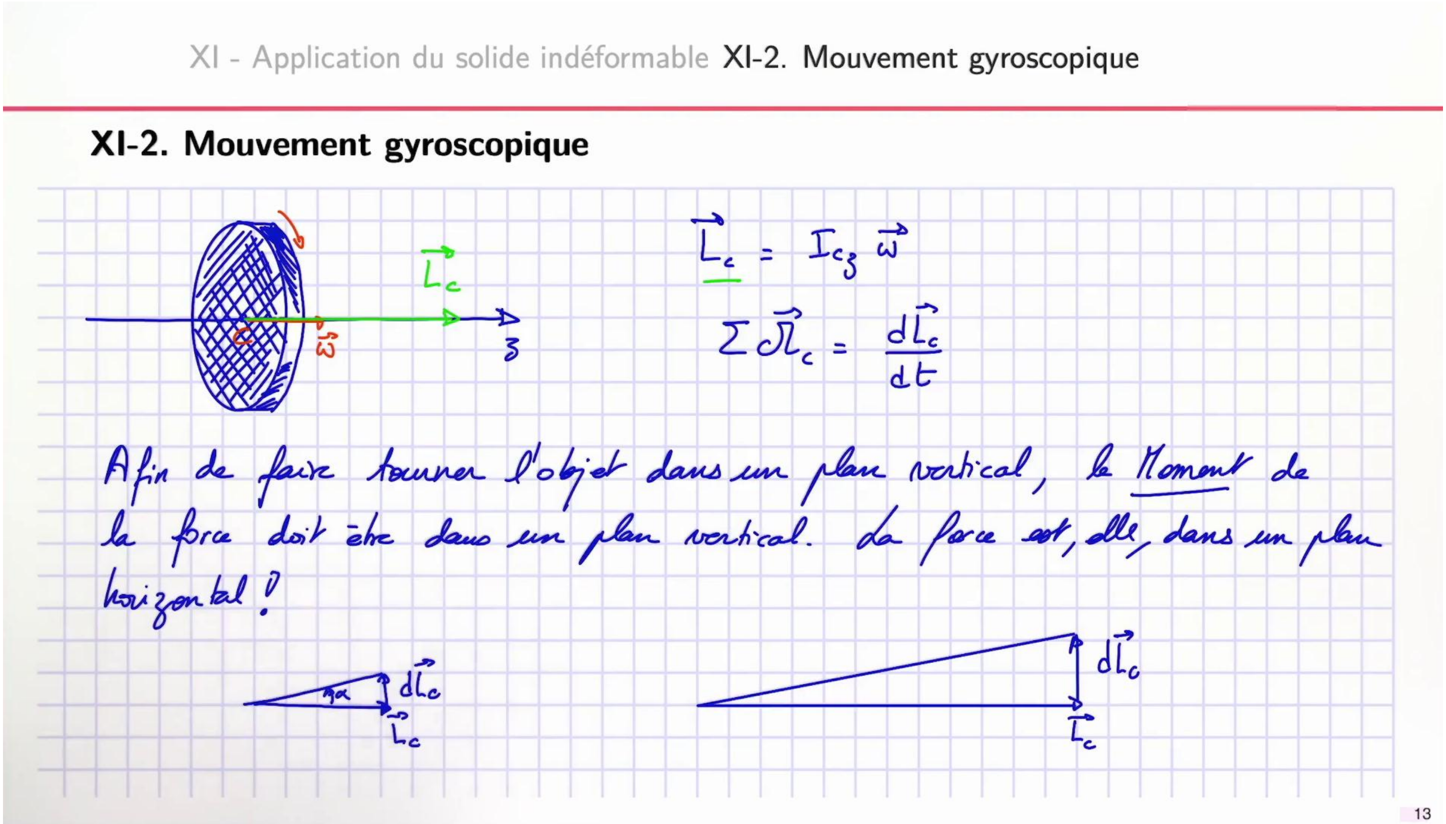


Afin d'obtenir cette variation, je dois avoir un moment des forces qui est donc dans ce plan. Or, le moment d'une force s'obtient par un produit vectoriel entre le vecteur qui donne la distance entre le point d'application et l'endroit où je calcule le moment, et le vecteur force. Le moment est donc perpendiculaire à la force. Si je veux obtenir un moment dans un plan vertical, je ne peux pas l'avoir avec une force dans un plan vertical. Je dois exercer une force dans un plan horizontal, soit vers l'avant, soit vers l'arrière. En l'occurrence, si je regarde pour un point d'application de F à gauche de mon objet, il y a une force dirigée vers l'extérieur de la feuille, lorsque je fais le produit vectoriel CP vectoriel F, je vais obtenir un moment vers le haut. Cela correspondra bien à un dL vers le haut, donc je devrais exercer une force qui pointe vers l'extérieur de la feuille, soit sur mon dessin dans un plan horizontal, afin de faire tourner cet objet dans un plan vertical. Afin de faire tourner l'objet dans un plan vertical, le moment de la force doit être dans un plan vertical. La force est donc, elle, dans un plan horizontal.

Notes

Summary

4m 11s

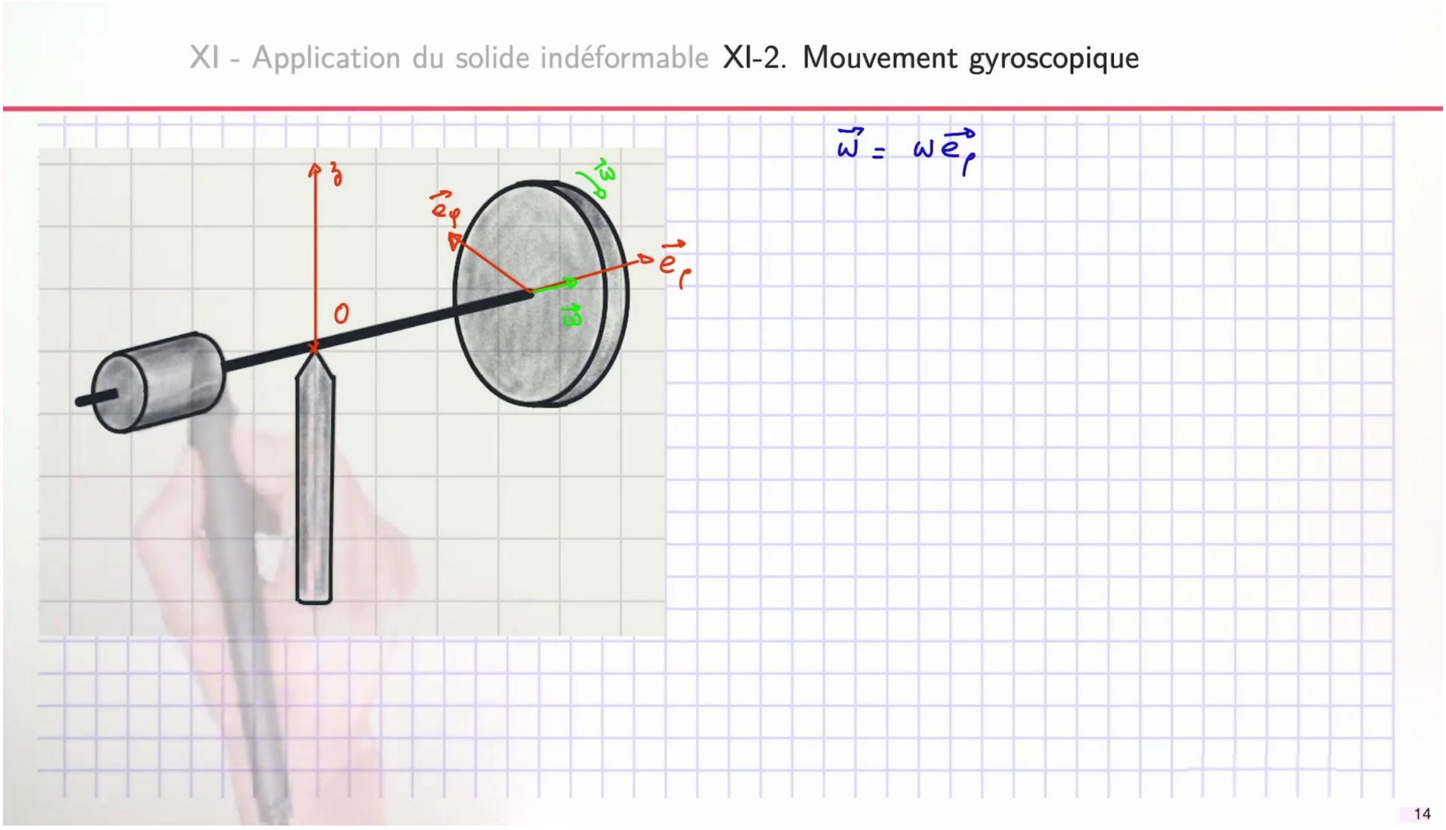


Par ailleurs, comparons ce qui se passe suivant que je veux faire tourner l'objet d'un angle α lorsque le moment cinétique LC a une norme pas trop grande et lorsqu'il a une norme très grande. Je choisis le même angle α. On voit tout de suite que pour un même angle α, le dLC sera plus faible si LC est faible, que si LC est grand. J'aurai donc besoin d'un moment de force plus important pour faire tourner cet objet si LC est grand, puisque le moment de force est proportionnel au dLC. Donc, si mon disque tourne plus vite ou si son moment d'inertie est plus grand, afin de le faire tourner, non seulement je devrais exercer une force dans un plan perpendiculaire à la direction dans laquelle je veux le faire tourner, mais en plus, plus son moment cinétique est grand, donc plus il tourne vite, plus IC est grand, plus le moment que je devrais exercer devra être important. Il sera donc plus difficile de faire tourner un tel objet si LC est grand.

Notes

Summary

5m 42s

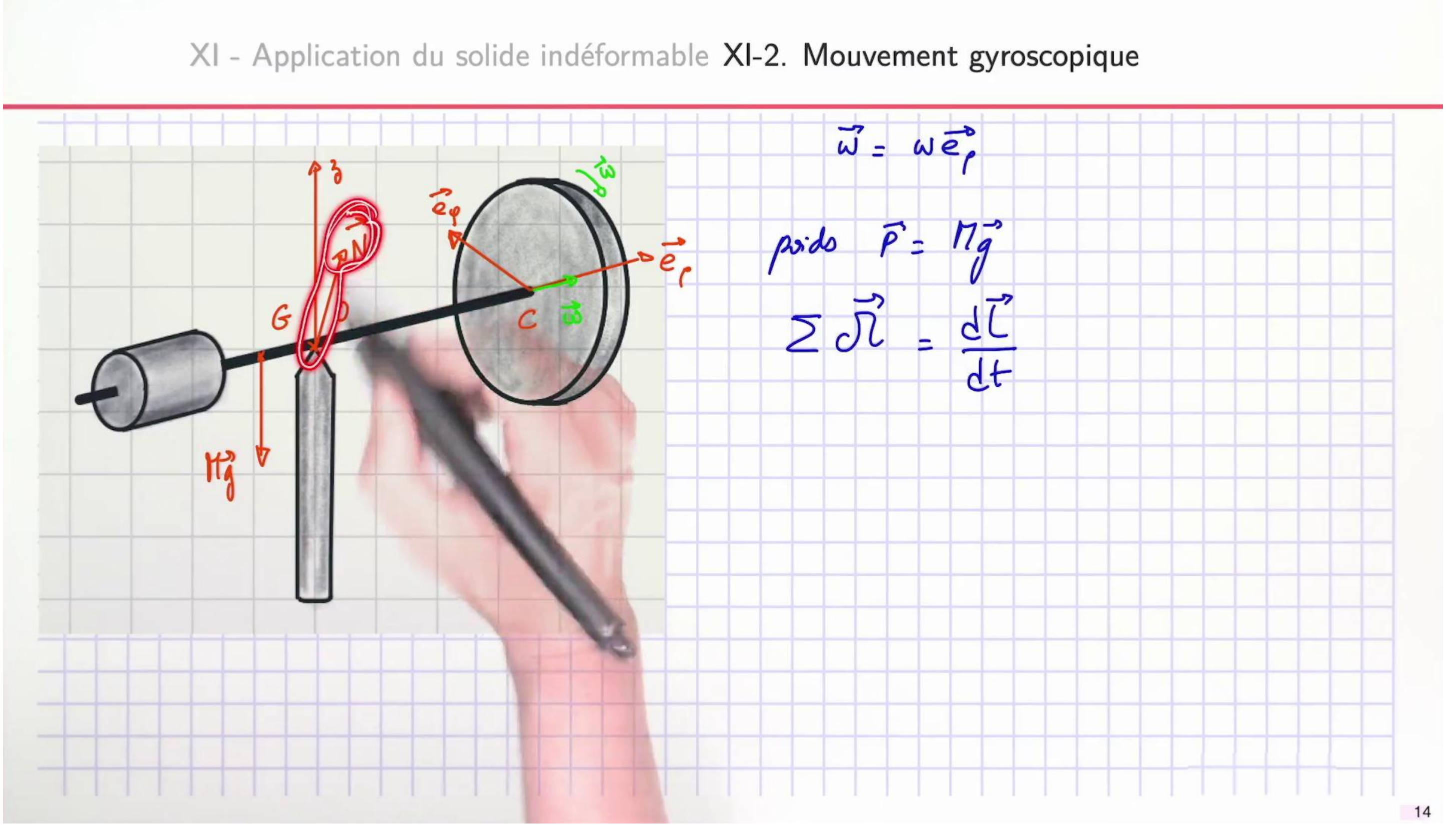


Nous allons maintenant analyser le mouvement de cet objet qui est un gyroscope de démonstration. J'ai un disque plein, lourd, que je peux mettre en rotation autour d'une tige par rapport à son centre C. Cette tige est donc solidaire du disque. Sur la tige, j'ai aussi un contrepoids que je peux déplacer à volonté. Mon système sera composé de la tige, du contrepoids et du disque. L'ensemble est fixé sur un pivot et peut, par rapport à ce pivot, tourner dans un plan horizontal ou dans un plan vertical. Je vais appeler O, le point de fixation sur le pivot, prendre un axe vertical Oz et utiliser directement les coordonnées cylindriques en utilisant le vecteur de base eρ colinéaire à l'axe du dispositif et donc un vecteur eφ perpendiculaire à la fois à eρ et ez dans un plan horizontal pointant ici un petit peu vers l'arrière. Je vais mettre mon cylindre en rotation avec un vecteur rotation ω. Je vais le choisir de telle manière à ce que ω pointe vers les eρ positifs. Le vecteur ω sera donc égal à ωeρ. Je peux utiliser le contrepoids et le déplacer de manière à changer la position du centre de masse. Je suppose que j'ai placé le contrepoids de telle manière que le pivot O soit situé entre le centre de masse et le centre du disque.

Notes

Summary

6m 51s

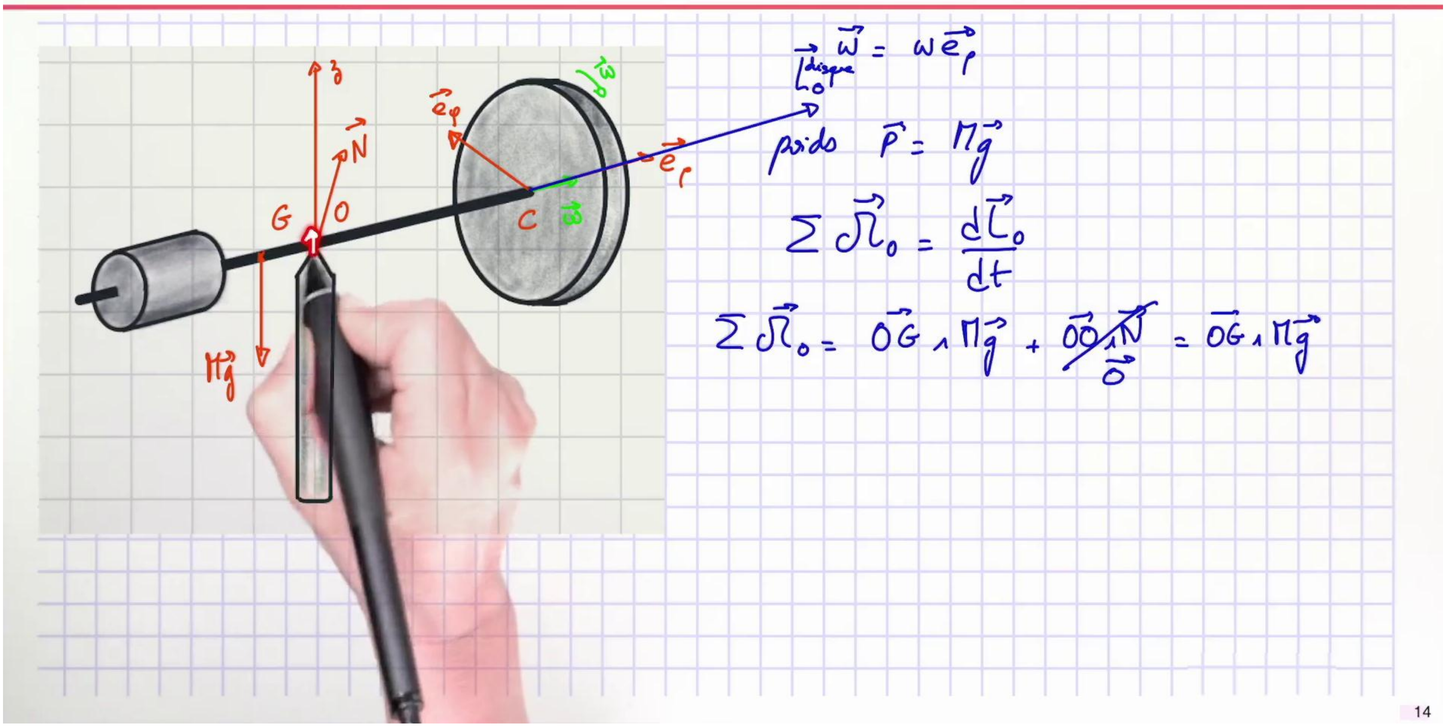


J'ai donc le centre de masse du système côté contrepoids, le centre du disque C. Les forces exercées sur le système sont le poids, p=mg si m est la masse de l'ensemble, donc le disque, la tige, le contrepoids, et ce poids s'exerce au centre de masse. Par ailleurs, le dispositif repose sur un pivot, donc j'ai le vecteur N correspondant à la force de support au niveau du pivot. Je ne connais pas exactement la direction de cette force de soutien, mais nous allons voir que ça n'est pas important. Nous allons devoir utiliser le théorème du moment cinétique somme des moments des forces égale dL/dt. Comme toujours, la question cruciale est de choisir le point d'application de ce théorème du moment cinétique. En gros, nous avons trois possibilités. Le centre de masse, le point de contact au niveau du pivot ou le centre du disque. Le point de contact a plusieurs avantages. D'abord, c'est un point fixe du référentiel alors que le centre de masse va bouger. Ensuite, c'est un point du solide à vitesse nulle puisque le solide est attaché par ce point de point de pivot. Et pour finir, au point de contact, le moment de la force de soutien sera nul. Je n'aurai donc pas besoin de m'en préoccuper.

Notes

Summary

8m 40s

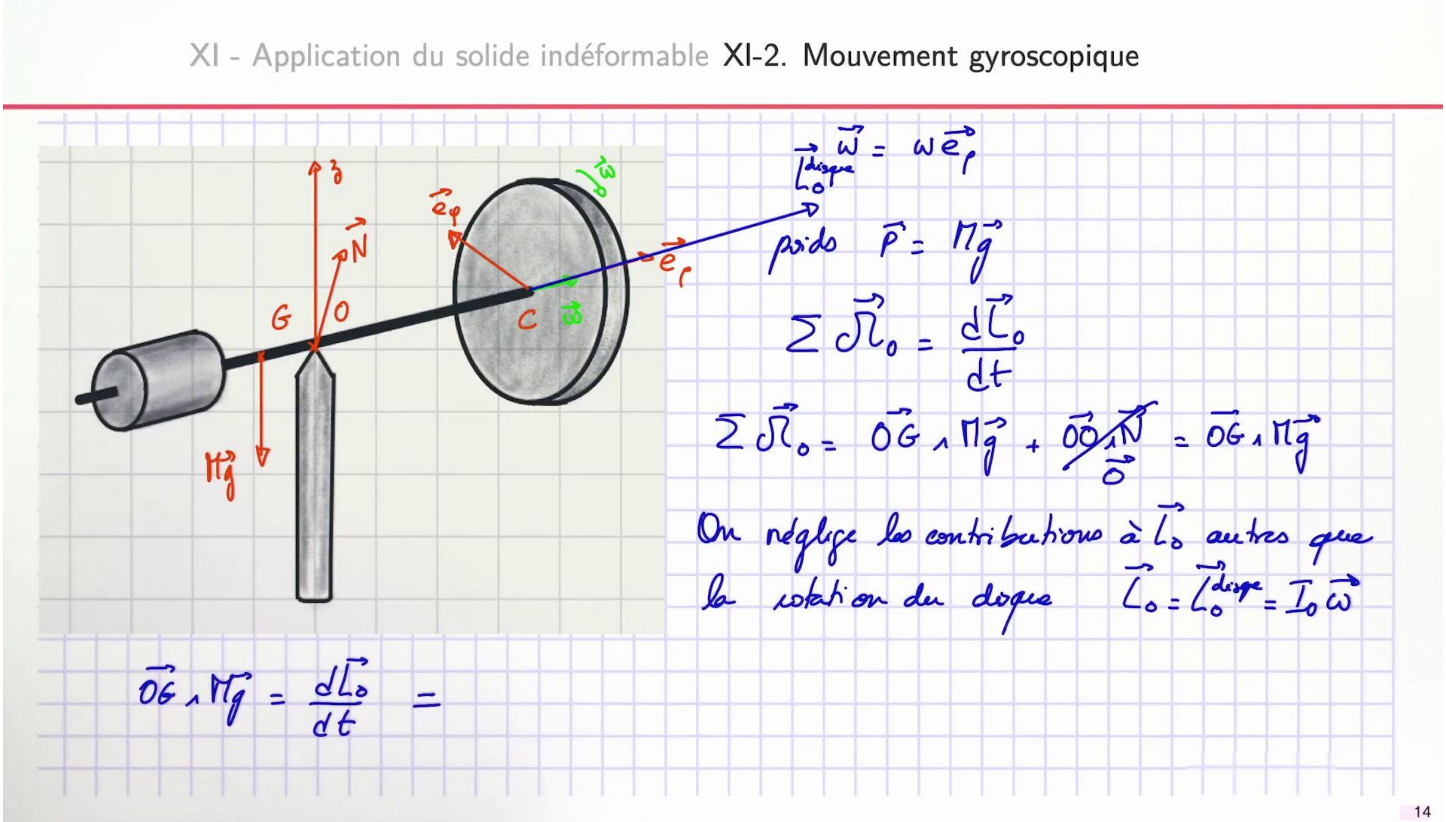


Trois bonnes raisons pour choisir O comme point d'application du théorème du moment cinétique. Lorsque je vais calculer la somme des moments des forces par rapport à O, j'aurai donc le moment du poids OG vectoriel Mg plus le moment de N, OO vectoriel N et cette deuxième contribution va disparaître. Il me restera OG vectoriel Mg. Le moment cinétique de cet objet est constituée d'une part de la contribution liée au fait que le disque tourne rapidement autour de l'axe, mais aussi éventuellement au fait que l'objet peut, par exemple, tourner dans un plan horizontal. La rotation du disque me fait une contribution selon le vecteur ω. La rotation dans le plan horizontal va me faire, par exemple, une contribution verticale. Mais j'ai dit que j'avais mis l'objet en rotation très rapide et que ce disque est particulièrement lourd. Le moment cinétique lié à cette rotation sera donc très grand. Je vais le représenter sur le schéma. Je vais l'appeler LOdisque. Le moment cinétique lié à la rotation dans un plan horizontal sera beaucoup plus faible. Je vais pouvoir donc négliger cette contribution et dire que le moment cinétique de mon objet est uniquement constitué de la contribution liée à la rotation du disque.

Notes

Summary

10m 08s

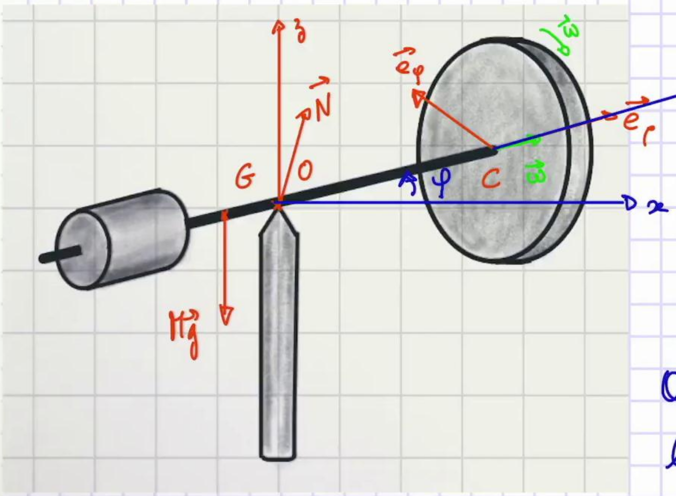


Donc, LO sera égal à LO disque que je peux obtenir comme étant le produit du moment d'inertie du disque par rapport à son axe, multiplié par le vecteur rotation du disque autour de son axe. J'ai donc le théorème du moment cinétique, OG vectoriel Mg est égal à dLO/dt. Le moment du poids OG vectoriel Mg, OGMg, c'est un vecteur dans un plan horizontal qui pointe vers nous. Il est donc dirigé selon moins eφ. J'obtiens donc le fait que dLO/dt est dirigé selon -eφ. Cela signifie qu'après un temps dt, mon LO aura changé d'un petit dLO qui est dans un plan horizontal. Le LO aura donc tourné. Le seul moyen de faire tourner ce vecteur LO dans un plan horizontal est de faire tourner l'intégralité du dispositif. L'intégralité du dispositif va donc progressivement tourner autour de son point d'attache qui est le point O et donc décrire un cercle dans un plan horizontal à cause du moment de cette force qui, elle, est verticale. Le but va maintenant être de calculer la vitesse de rotation du dispositif entier dans le plan horizontal. Cela sera fait à l'aide de ce théorème du moment cinétique. OG vectoriel Mg = dLO/dt.

Notes

Summary

11m 57s



$\vec{L}_O^{disque}$ $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_\rho$

poids $\vec{P} = M\vec{g}$

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{OG} \wedge M\vec{g} + \underbrace{\cancel{\vec{OO} \wedge \vec{N}}}_{\vec{0}} = \vec{OG} \wedge M\vec{g}$$

On néglige les contributions à $\vec{L}_O$ autres que la rotation du disque $\vec{L}_O = \vec{L}_O^{disque} = I_O \vec{\omega}$

$$\vec{OG} \wedge M\vec{g} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \Rightarrow (-OG\,\vec{e}_\rho) \wedge (-Mg\,\vec{e}_z) = \frac{d}{dt}\left(I_O\, \omega \vec{e}_\rho\right) = I_O\, \omega \dot{\vec{e}}_\rho = I_O\, \omega \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

14

Exprimé à l'aide des vecteurs de base, j'ai donc OG qui vaut moins la distance OG multipliée par le vecteur de base eρ produit vectoriel Mg qui lui, va s'écrire moins Mg, vecteur de base ez. Ceci est égal à dLO/dt soit d/dt de LO qui vaut IO, vecteur ω, soit norme de ω, vecteur de base eρ. Le moment cinétique est constant et nous supposons l'expérience suffisamment courte pour que le vecteur rotation ω du disque reste constant en norme. En gros, le disque n'a pas le temps de ralentir sa rotation. Je peux donc sortir ces deux termes de la dérivée et le seul terme à dériver est le vecteur de base eρ. On voit bien que si l'objet se met à tourner dans un plan horizontal, le vecteur de base eρ va tourner lui aussi. On peut donc sortir ces deux termes de la dérivée. C'est IO ω eρ point. En coordonnées cylindriques, la dérivée de eρ est égale à φpoint eφ. C'est donc IO ω φpoint eφ. Je rappelle que dans ce cas-là, φ était l'angle mesuré entre un axe Ox fixe et l'axe porté par eρ. C'est l'angle que je retrouve ici dans un plan horizontal. Si φ point est positif, j'aurai une rotation avec un vecteur rotation vers les Oz positifs. Si φ point est négatif, j'obtiendrai une rotation dans l'autre sens. Je vais donc maintenant exprimer ce produit vectoriel et l'égaler avec IO ω φpoint eφ.

Notes

Summary

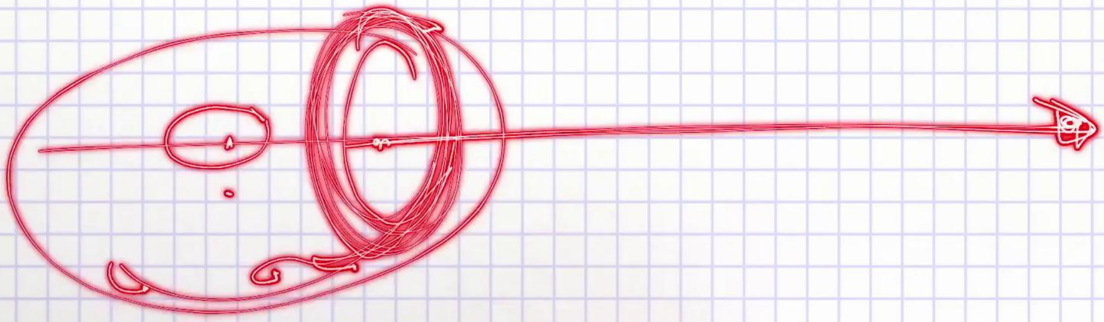
13m 49s

XI - Application du solide indéformable XI-2. Mouvement gyroscopique

$$(-OG\,\vec{e}_\rho)\wedge(-Mg\,\vec{e}_3) = Mg\,OG\,(-\vec{e}_\varphi) = I_0\,\omega\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$OG = d_G$

$$\dot{\varphi} = -\frac{Mg\,OG}{I_0\,\omega} = -\frac{Mg\,d_G}{I_0\,\omega}$$ vitesse angulaire de précession



15

- par -, cela fait +. J'ai donc Mg distance OG, eρ vectoriel ez est égal à -eφ. Et ceci doit être égal à IO ω φpoint eφ. Je cherche la vitesse angulaire de rotation de l'objet dans un plan horizontal, donc je cherche φ point. φ point est donc égal à moins Mg distance OG divisé par IOω. Je peux appeler la distance OG dG et à ce moment-là, j'obtiens moins MgdG divisé par IOω. J'ai donc obtenu la vitesse angulaire de rotation dans un plan horizontal, c'est ce que l'on appelle la vitesse de précession. On remarque que plus la distance OG est grande, plus cette vitesse de précession est grande. Si je déséquilibre beaucoup le contrepoids, la vitesse angulaire de précession sera plus grande. La masse du dispositif est un peu complexe, car elle entre dans la masse totale, mais aussi partiellement dans le moment d'inertie IO. Mais il y a une autre chose intéressante, c'est plus ω est grand, donc plus je mets mon disque en rotation rapide, plus la vitesse de précession φpoint sera faible. Et donc on voit bien que si j'ai une grande vitesse angulaire ici, une faible vitesse de précession, l'approximation que j'ai faite de considérer uniquement le moment cinétique lié à la rotation du disque et pas le moment cinétique lié à la précession totale du dispositif est justifiée.

Notes

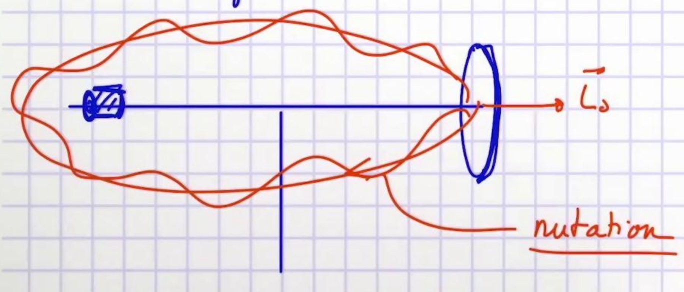
Summary

16m 01s

$$(-OG\,\vec{e}_\rho)\wedge(-Mg\,\vec{e}_3) = Mg\,OG\,(-\vec{e}_\varphi) = I_0\,\omega\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \qquad OG = d_G$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{Mg\,OG}{I_0\,\omega} = -\frac{Mg\,d_G}{I_0\,\omega}$$ vitesse angulaire de précession

Le gyroscope se met en rotation dans un plan horizontal à la vitesse angulaire $\Omega = \dot{\varphi}$



15

On peut donc dire que le gyroscope se met en rotation dans un plan horizontal à la vitesse angulaire Ω qui est égale à φ point. Si on voulait faire une analyse complète, on devrait, comme je l'ai précisé précédemment, prendre en compte non seulement le moment cinétique lié à la rotation du disque, LO, mais aussi le moment cinétique lié au mouvement de précession global. Si je prends le mouvement de précession dans un plan horizontal, il crée un moment cinétique pointant vers le haut. La précession est uniquement la rotation autour de l'axe vertical. Lorsque ω diminue, les autres contributions au moment cinétique ne sont plus négligeables, car d'une part, LO diminue, d'autre part, la vitesse angulaire de précession augmente. À ce moment-là, le mouvement devient plus complexe et on verra par exemple une oscillation de l'axe de rotation autour de cet axe horizontal. Cette oscillation s'appelle la nutation, mais nous n'allons pas essayer de la calculer.

Notes

Summary

17m 58s

Voilà, nous avons donc pu utiliser nos connaissances en mécanique du solide pour décrire, prédire et caractériser le mouvement gyroscopique. Nous avons même pu calculer la vitesse angulaire avec laquelle le gyroscope tourne autour de son axe vertical lorsqu'il est déséquilibré et mis en rotation rapide.

Notes

Summary

19m 15s