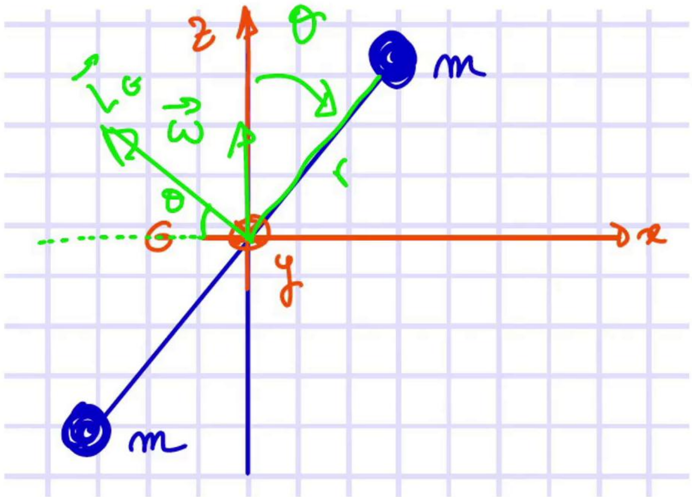
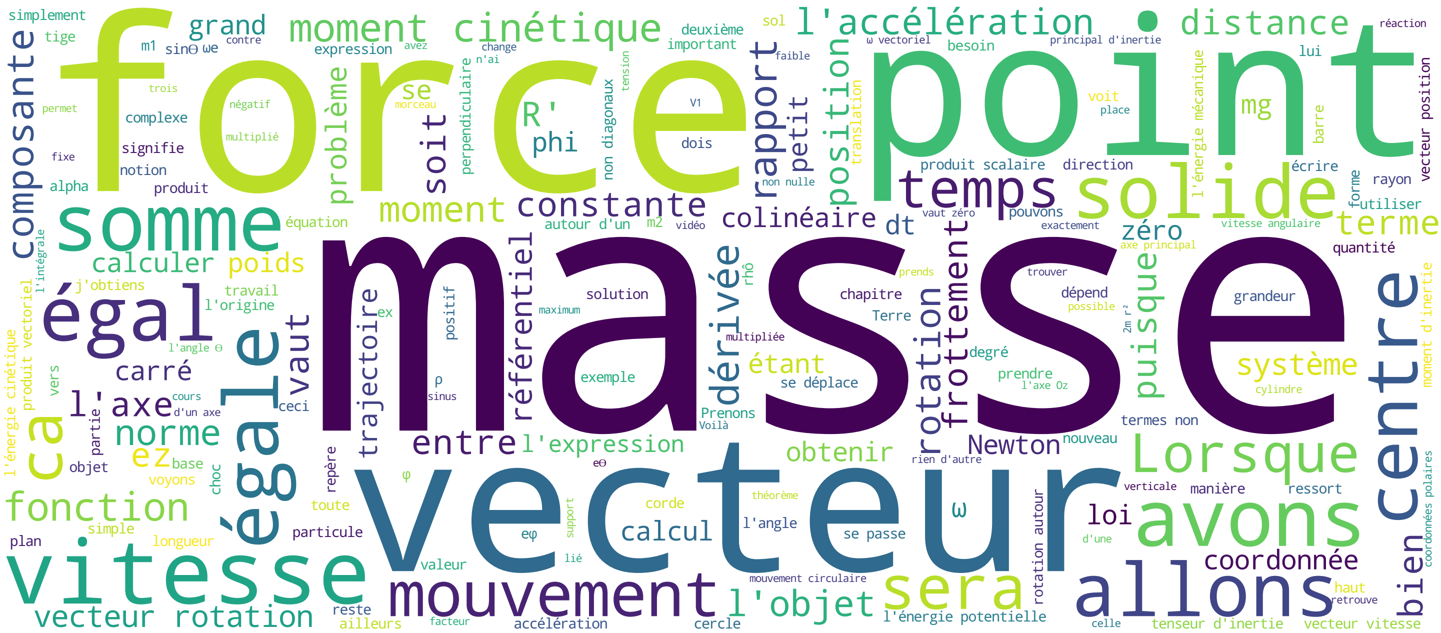


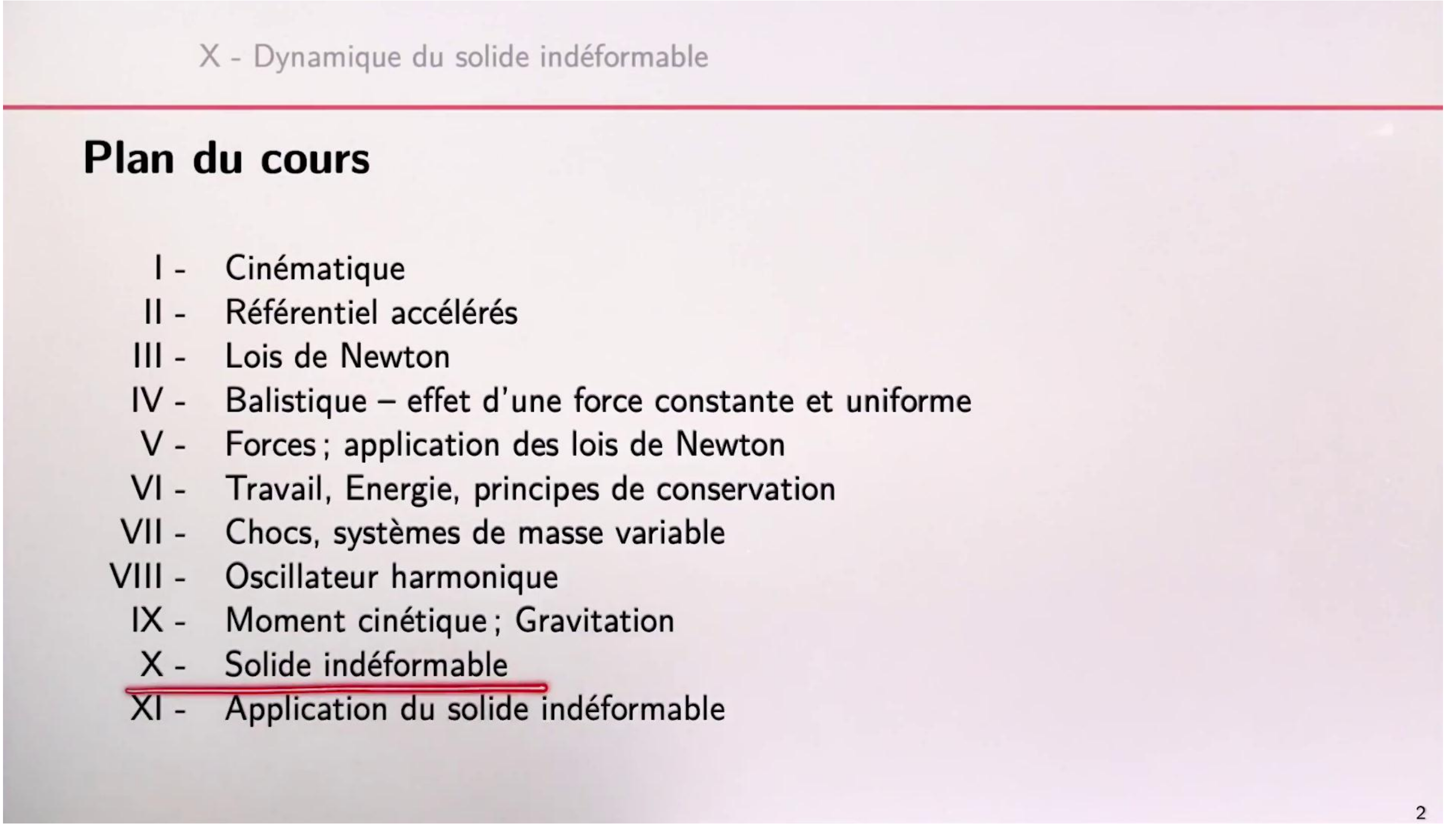
Tenseur d'inertie

Prof. Cécile Hébert



Video

EPFL

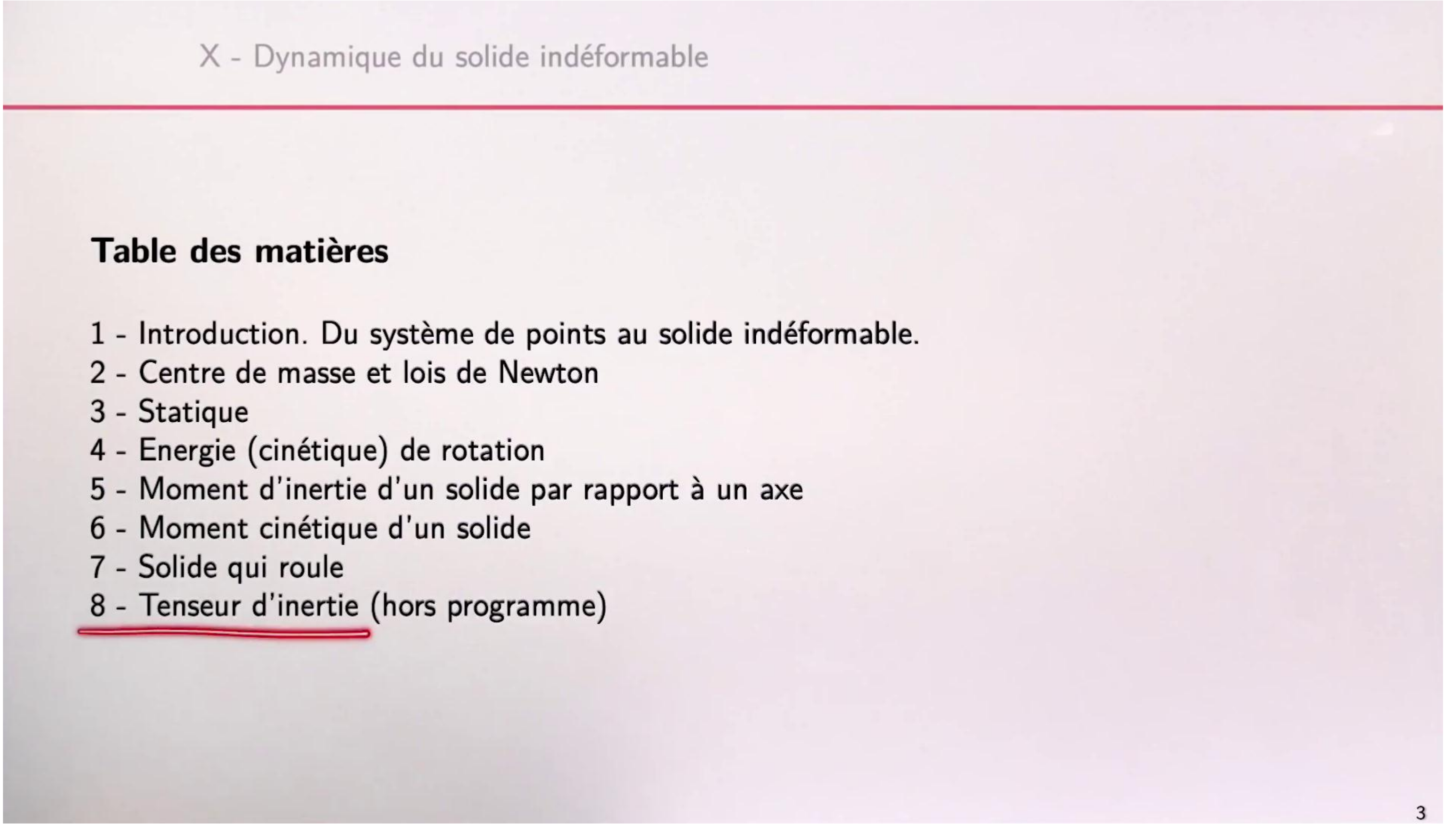


Dans cette vidéo qui est hors programme, je vous invite à regarder rapidement quelle serait l'approche que l'on prendrait si on avait le calcul matriciel à notre disposition. Je vous montrerai aussi comment on applique ce calcul matriciel et la notion de tenseur d'inertie au cas simple de l'alter étudié au début de ce chapitre, lorsque nous avions le solide en rotation autour d'un axe qui n'est pas l'axe principal d'inertie.

Notes

Summary

0m 05s



Nous sommes dans le chapitre 10 sur le solide indéformable et nous allons voir le tenseur d'inertie.

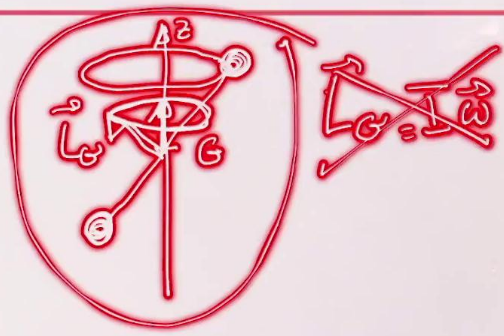
Notes

Summary

0m 34s

8 - Tenseur d'inertie (hors programme)

Cas ou l'axe de rotation passe par G, centre de masse :



En fait, de manière générale :

$$\vec{L}_G = \underline{I}\,\vec{\omega}$$

avec :

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} \int(y^2+z^2)dm & -\int xydm & -\int xzdm \\ -\int xydm & \int(x^2+z^2)dm & -\int yzdm \\ -\int xzdm & -\int yzdm & \int(x^2+y^2)dm \end{bmatrix}$$

$\underline{I}$ est le tenseur d'inertie, il dépend de l'origine et des axes choisis.

35

Ce paragraphe étant hors programme, il ne viendra ni dans les exercices, ni à l'examen, mais je pense qu'il est important pour vous de voir comment le calcul peut être fait lorsque l'on maîtrise le calcul matriciel. Nous nous sommes limités dans l'étude au cas où la rotation se fait autour d'un axe principal d'inertie. Nous avons par ailleurs vu le cas du solide simplifié constitué de deux masses reliées entre elles par une tige sans masse. En mettant ce solide en rotation autour du centre de masse avec un axe Gz quelconque, on obtient un solide qui ne tourne pas forcément autour d'un axe principal d'inertie. Le moment cinétique LG n'est alors pas forcément colinéaire au vecteur rotation. Dans ce cas, j'ai une précession du moment cinétique qui n'est pas constante au cours du temps. Je ne peux donc pas calculer LG égal 1 scalaire fois le vecteur rotation. Pourtant, c'est un cas général qui peut se présenter. Dans ce cas général, le moment cinétique est le produit d'un tenseur représenté par une matrice 3 par 3 et du vecteur rotation. Ce tenseur s'appelle le tenseur d'inertie.

Notes

Summary

0m 43s

8 - Tenseur d'inertie (hors programme)

Cas ou l'axe de rotation passe par G, centre de masse :

En fait, de manière générale :

$$\vec{L}_G = \underline{I}_G \vec{\omega}$$

avec :

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} \int (y^2+z^2)dm & -\int xydm & -\int xzdm \\ -\int xydm & \int (x^2+z^2)dm & -\int yzdm \\ -\int xzdm & -\int yzdm & \int (x^2+y^2)dm \end{bmatrix}$$

$\underline{I}$ est le tenseur d'inertie, il dépend de l'origine et des axes choisis.

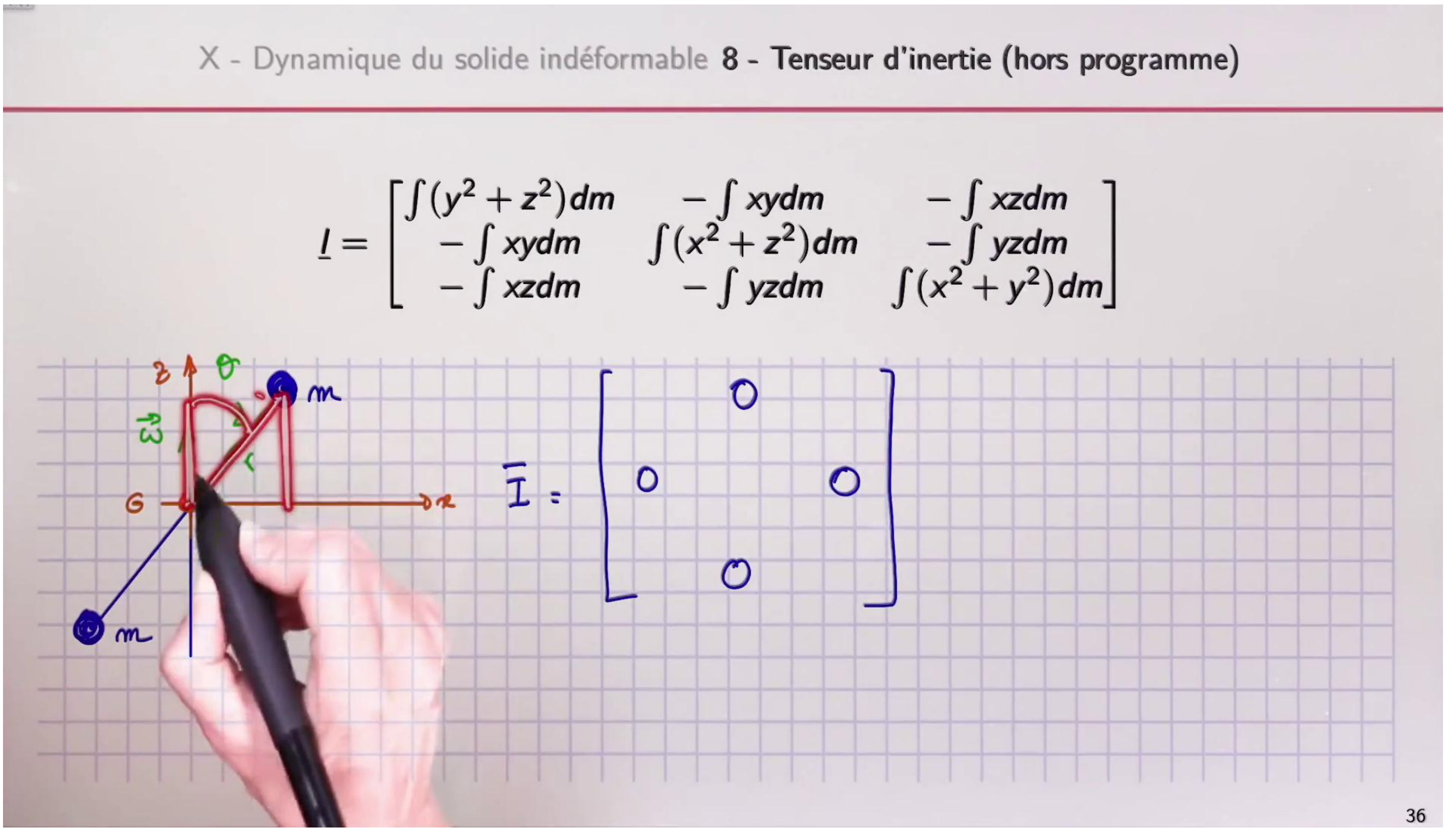
35

L'expression du tenseur d'inertie est celle-ci. Ce tenseur a des termes diagonaux qui ne sont rien d'autre que le moment d'inertie par rapport aux axes connus, par rapport à l'axe Gx, Gy et Gz. Mais nous avons en plus des termes non diagonaux. Dans le cas où les axes choisis sont des axes principaux d'inertie, les termes non diagonaux disparaissent. Si vous regardez bien l'expression de ce tenseur d'inertie, vous remarquez que c'est une matrice symétrique. Une matrice symétrique est diagonalisable. Il existe donc trois axes, X, Y, Z, dans lesquels ce tenseur sera diagonal. Ce sont les axes principaux d'inertie du solide. C'est pour ça qu'on peut dire qu'un solide a toujours au moins trois axes principaux d'inertie. Il peut exister d'autres systèmes d'axes dans lesquels le tenseur sera diagonal. Maintenant, que se passe-t-il si je multiplie ce tenseur général avec un vecteur rotation qui n'a qu'une composante sur Z ? Dans la multiplication matricielle, le résultat va toujours récupérer la dernière composante. Je vais donc obtenir un vecteur à trois composantes qui seront toutes les trois non-nulles, puisque j'ai des termes non diagonaux non-nulles. Le résultat sera donc un vecteur L qui ne sera pas colinéaire au vecteur rotation.

Notes

Summary

2m 09s

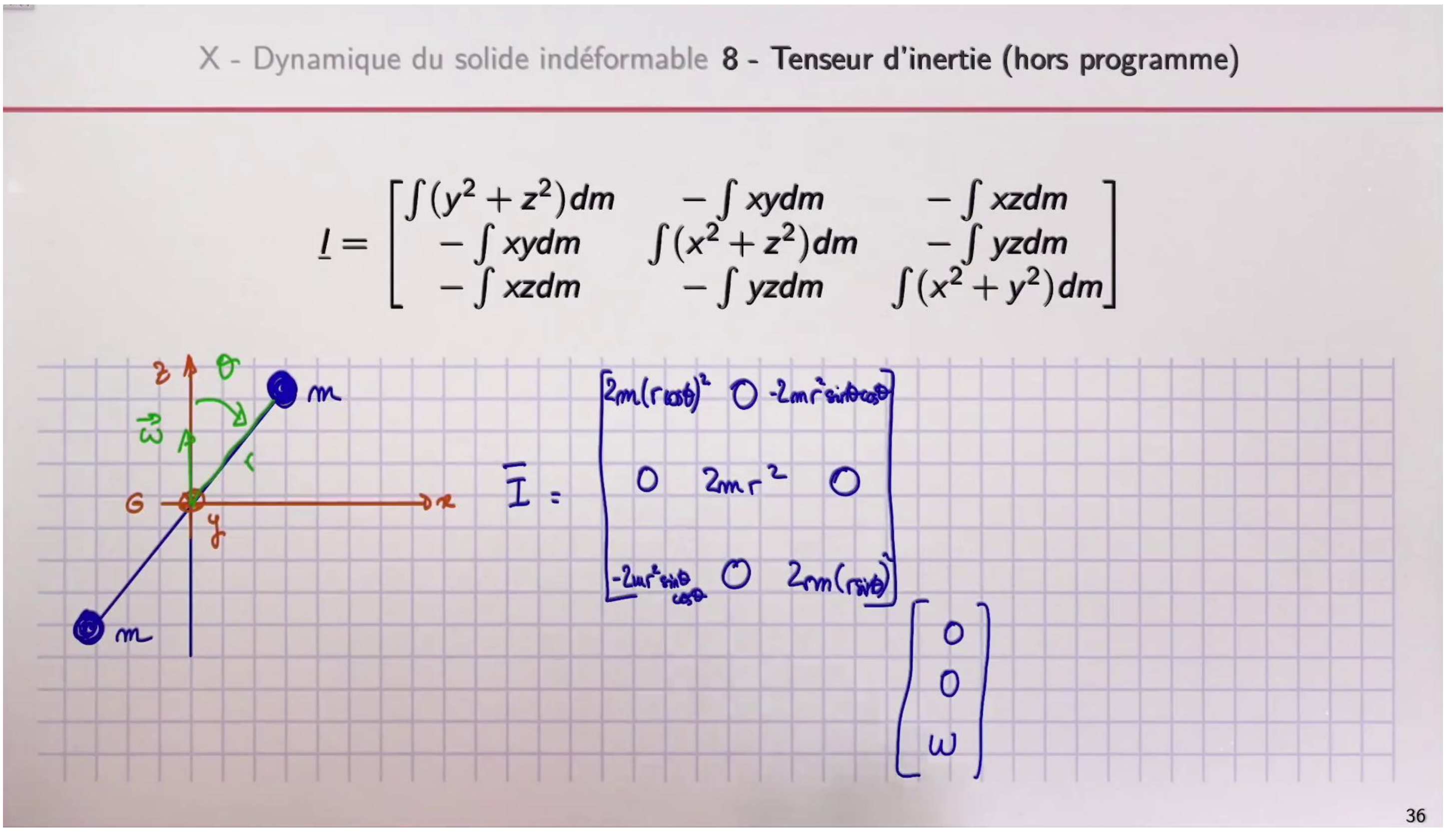


Je reprends le cas du solide constitué de deux masses accrochées entre elles par une tige sans masse. Je fais passer un système d'axes G, x, y et z par le centre de masse. Ce système d'axes est lié au solide. Je suppose que le solide tourne avec le vecteur rotation ω aligné avec l'axe Oz. J'appelle r la demi-longueur de la tige et Θ l'angle que fait la tige avec l'axe de rotation. Chaque sphère a une masse m. Dans ce cas, le calcul du danseur d'inertie va nous donner le résultat suivant. Le calcul se fera uniquement sur la position des masses m. Dans le repère Gxyz, le vecteur position de m a une composante non nulle sur Gx et Gz, mais une composante nulle sur Gy. Cela nous fera disparaître quatre termes non-diagonaux qui seront nuls. Les trois termes diagonaux contiennent respectivement la distance au carré à l'axe Gx, donc cette distance-là pour le premier terme, la distance au carré à l'axe Gy qui n'est rien d'autre que r carré, et la distance au carré à l'axe Gz. La distance à l'axe Gx est liée à R et à l'angle Θ. Puisque je retrouve l'angle Θ ici, cette distance m Gx est donc R cos(θ) que je vais trouver au carré.

Notes

Summary

3m 59s

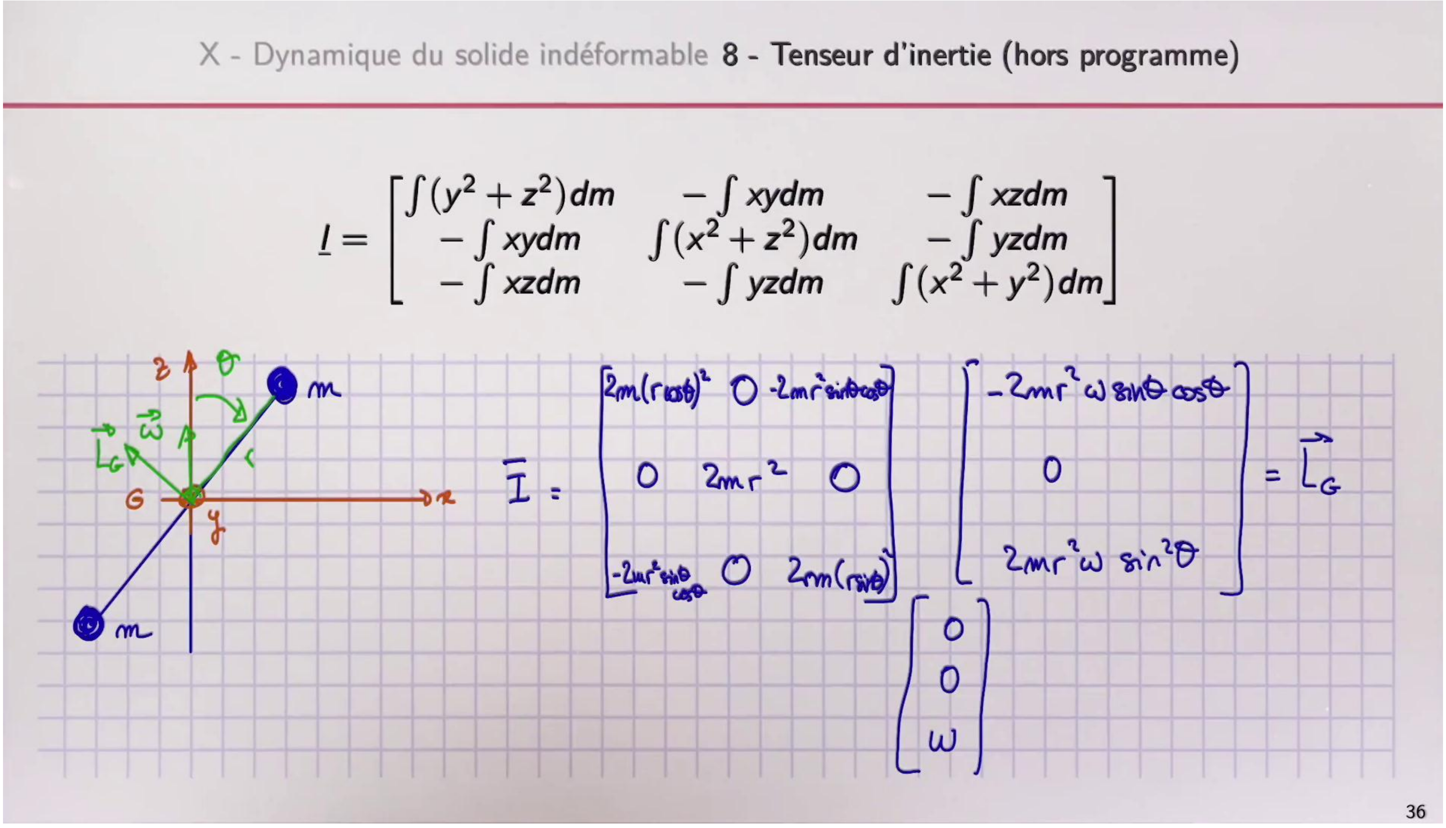


Par ailleurs, l'intégrale avec la masse, puisque j'ai deux masses et que ces deux masses sont chacune à la même distance de Gx, me donnera un 2m. Pour le deuxième terme, j'ai la distance à l'axe Gy. Ici, c'est r. Je vais donc avoir un r carré multiplié par 2m. Le troisième terme diagonal comprend la distance à l'axe Gz qui est proportionnelle à r sin(θ). Comme j'ai le terme au carré, je vais obtenir $2m(r\sin\theta)^2$. Il me reste deux termes non diagonaux. Ce seront des termes non-diagonaux non-nuls. J'ai le produit de la composante x et de la composante z. La composante x de la position de m étant rsin(θ), la composante z étant rcos(θ). J'ai donc $-2m\ r^2 \sin(\theta)\cos(\theta)$. La matrice est symétrique, je retrouve le même terme de l'autre côté. Pour obtenir le moment cinétique, je dois faire le produit du tenseur d'inertie avec le vecteur rotation ω. Je dois exprimer ce vecteur rotation dans le même système d'axes que mon tenseur d'inertie. Ω étant collinaire à Gz, n'a pas de composante ni sur x ni sur x, les deux premières composantes sont nulles et la dernière est égale à ω. Lorsque je fais le produit de ce vecteur avec cette matrice, je vais uniquement trouver le produit de ω avec à chaque fois le terme de la dernière colonne.

Notes

Summary

6m 05s



Sur x, j'ai donc -2m r² ω sin(θ) cos(θ). Sur y, 0. Et sur z, 2m r² ω sin²ϴ. Ce vecteur est donc égal au moment cinétique par rapport à G. On remarque que je retrouve 2m r² ω, 2m r² ω, elle est ici, une fois sinϴ, et là, un sin²ϴ. J'ai donc un vecteur LG de norme 2mr² ω sinϴ, et dont la direction sera donnée par un vecteur pointant en -cosϴ + sinϴ. -cosϴ/x + sinϴ/y. Je retrouve bien un vecteur perpendiculaire à l'axe de la tige pointant ici vers la gauche. Ce vecteur LG est également exprimé dans le système d'axes Gxyz, il tourne donc avec le solide en ayant un mouvement de précession. Je vous rassure, vous n'aurez pas à faire de calculs de ce genre en exercice ou à l'examen, mais je pense qu'il est bon que vous voyez qu'on peut aller beaucoup plus loin quand on maîtrise le calcul matriciel.

Notes

Summary

8m 09s

Voilà, avec cela, nous concluons ce chapitre sur le solide. Vous avez donc toutes les notions nécessaires pour résoudre les exercices. Dans un prochain chapitre, nous verrons deux exemples d'application.

Notes

Summary

9m 41s