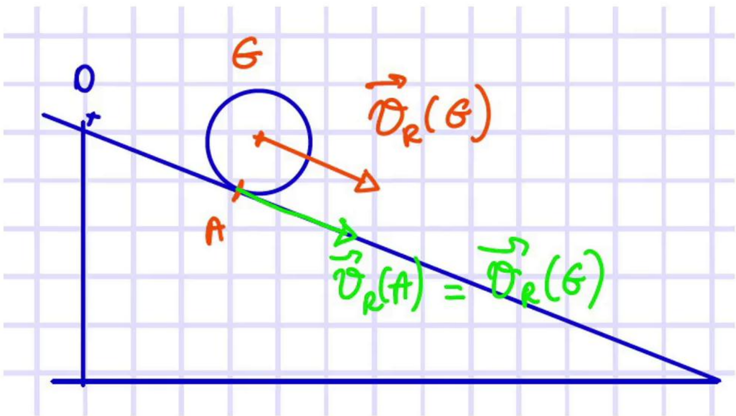
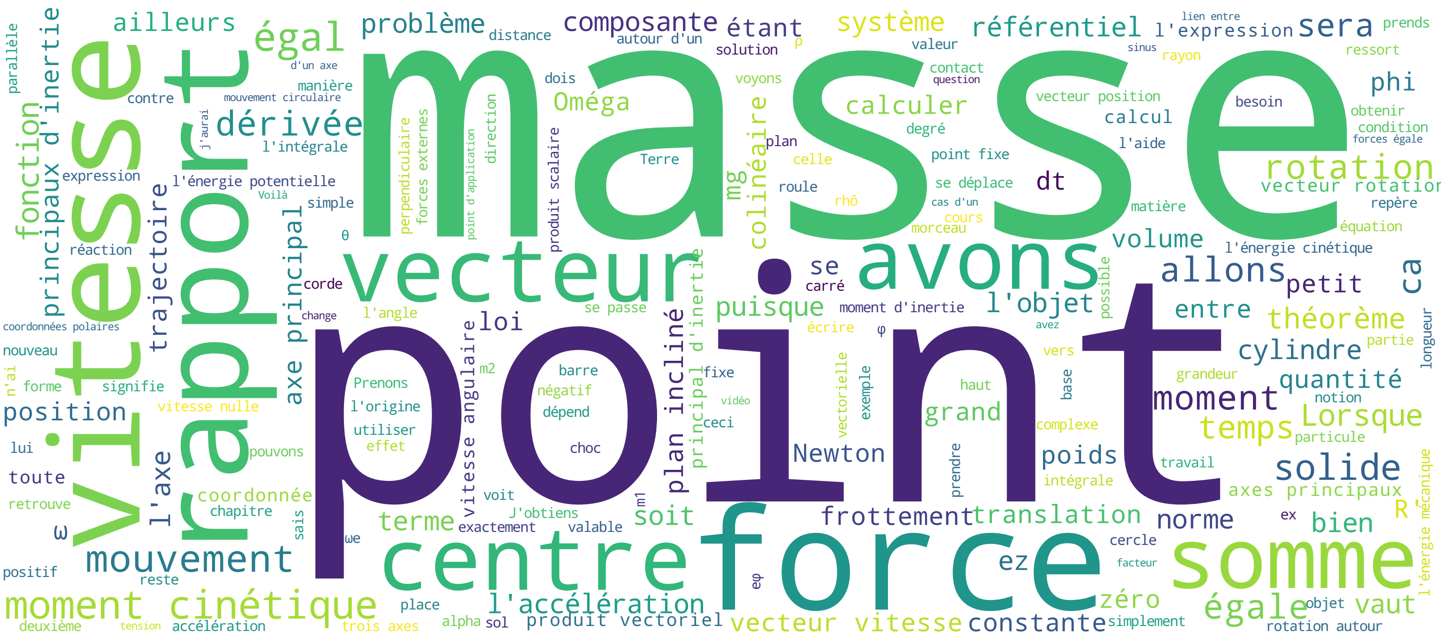


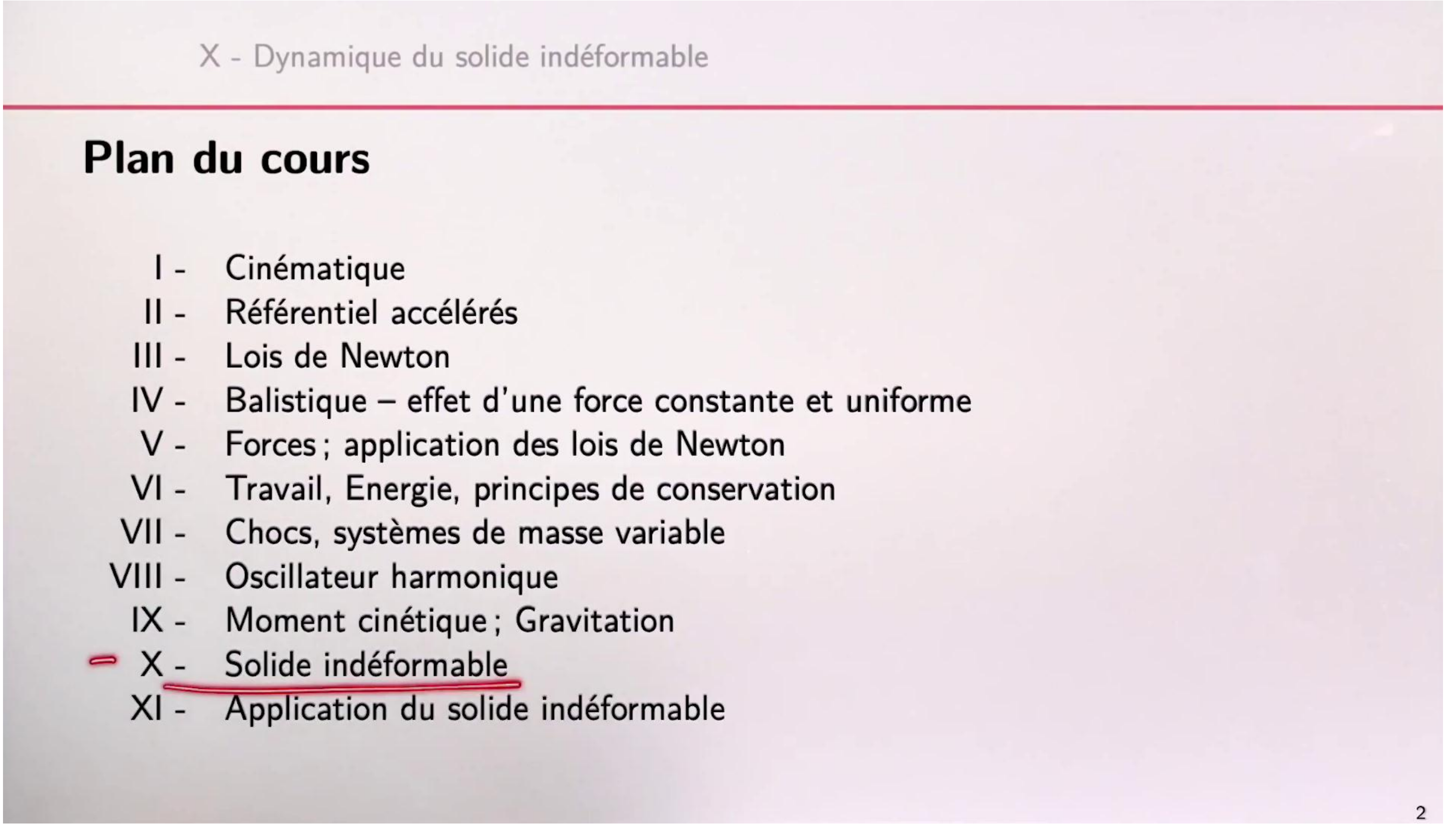
Solide qui roule

Prof. Cécile Hébert



Video

EPFL

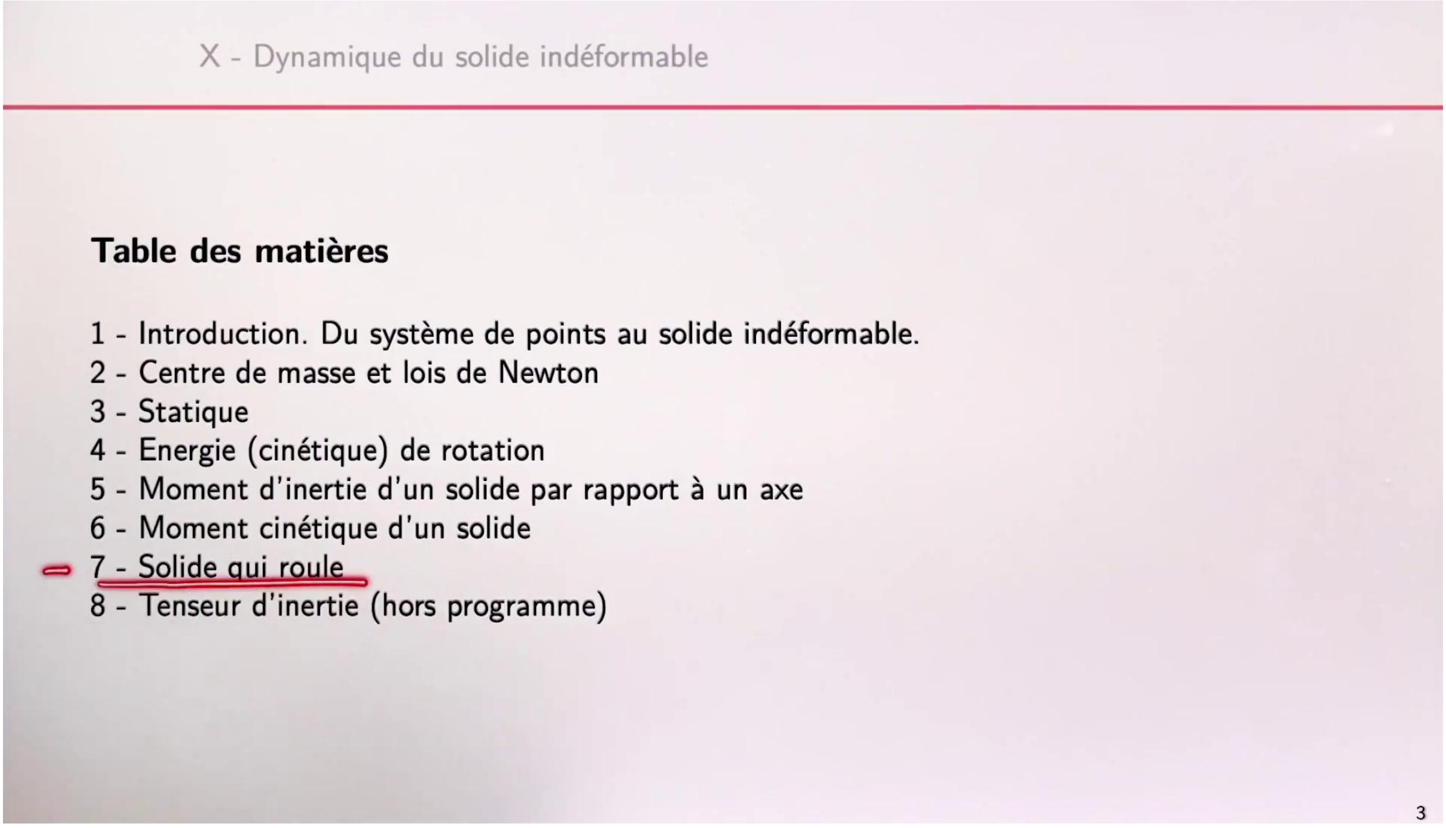


Jusqu'à présent, pour utiliser le théorème du moment cinétique, nous avons toujours considéré un solide en rotation autour d'un axe fixe. Nous avons alors appliqué le théorème du moment cinétique par rapport à un point passant par cet axe. Nous allons voir dans cette vidéo comment il est possible d'utiliser le théorème du moment cinétique dans des conditions plus générales. Cela sera indispensable pour étudier à l'aide du théorème du moment cinétique, un solide qui, par exemple, roule le long d'un plan incliné dans lequel nous avons un mouvement de translation et un mouvement de rotation.

Notes

Summary

0m 05s

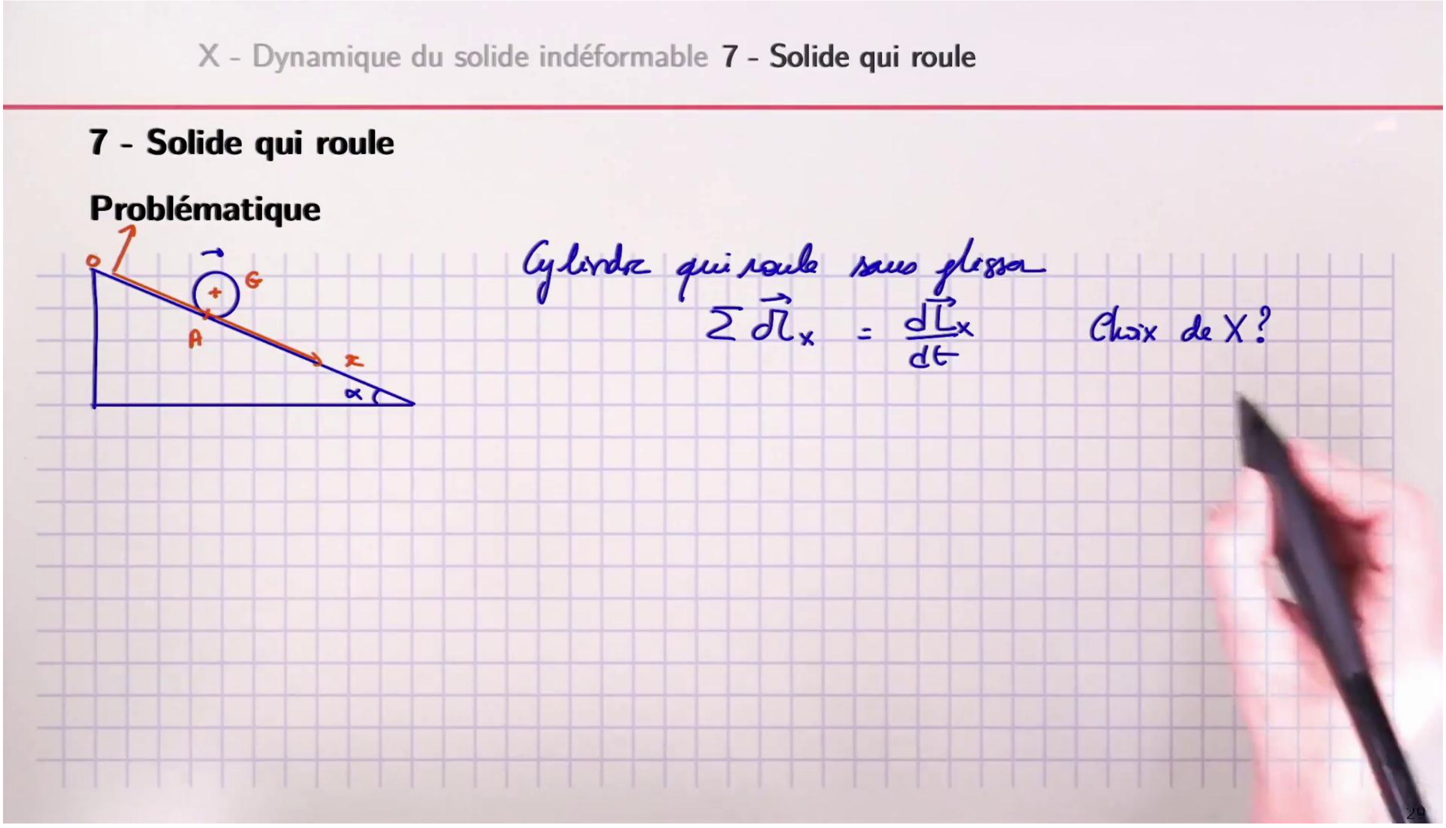


Nous sommes dans le chapitre 10 sur le solide indéformable et nous allons voir le point 7, le cas d'un solide qui roule.

Notes

Summary

0m 42s

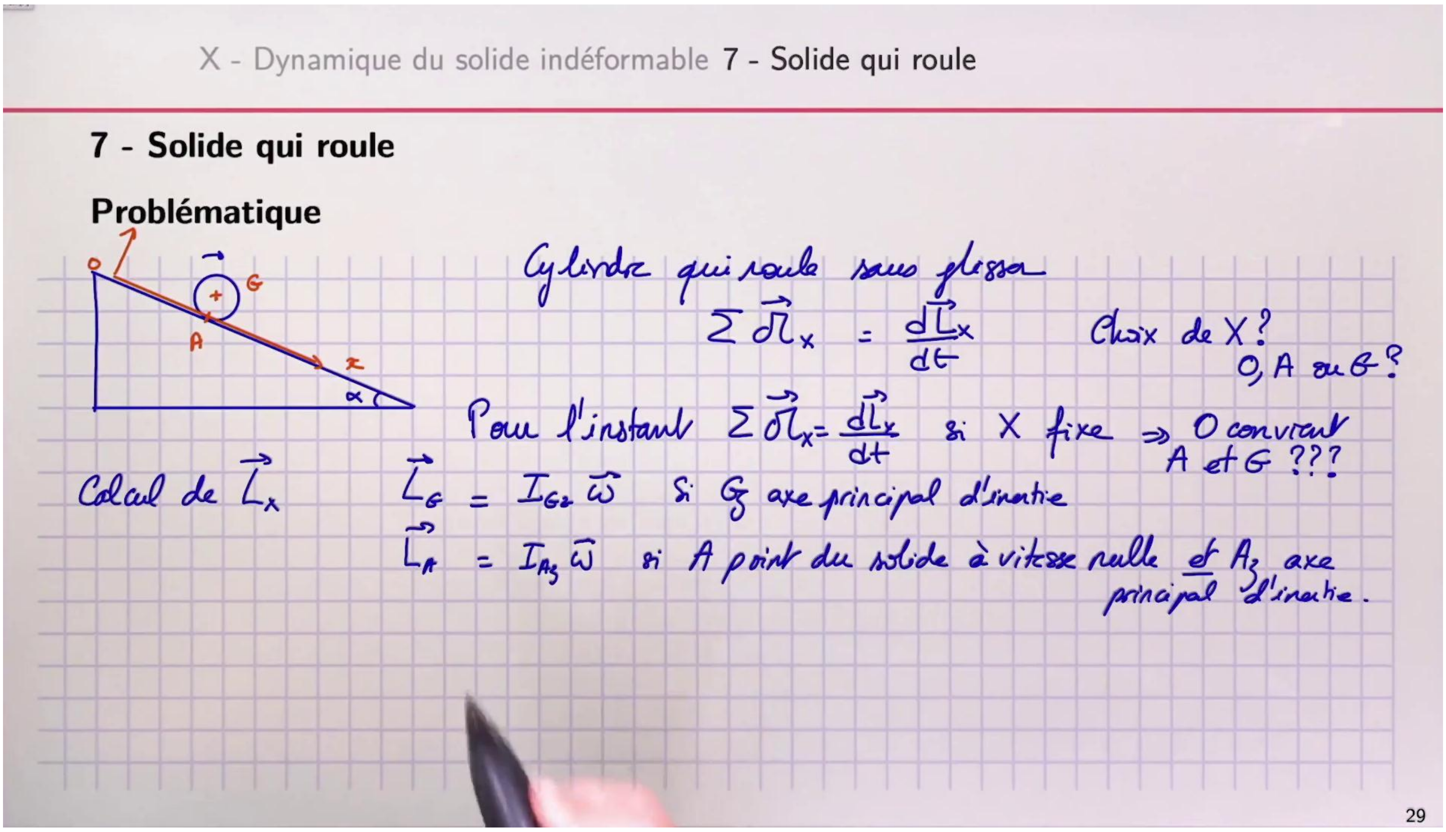


Nous avons vu comment traiter le problème d'une poulie qui tourne autour d'un axe fixe passant par son centre de masse. Mais prenons la situation suivante. Imaginons que j'ai un plan incliné d'un angle Alpha avec l'horizontale et sur ce plan incliné, je place un cylindre. Ce cylindre peut rouler sans glisser. Il a donc à la fois un mouvement de rotation et un mouvement de translation du centre de masse. Je n'ai donc pas un objet fixe dans le référentiel. L'origine de mon référentiel est un point O qui lui est fixe. Pour étudier le mouvement de ce cylindre qui roule sans glisser, je souhaite utiliser le théorème du moment cinétique. Somme des moments, des forces est égal à D-L sur D-T. Le problème, c'est que pour utiliser ce théorème, je dois choisir un point d'application que je vais appeler grand X, point inconnu. Je dois maintenant le choisir. J'ai trois points particuliers dans ce problème. D'une part, l'origine du référentiel et d'autre part, le point de contact entre le cylindre et le plan incliné que je vais appeler A et le centre de masse du cylindre que je vais appeler grand G. Je peux donc prendre O, A ou grand G.

Notes

Summary

0m 51s

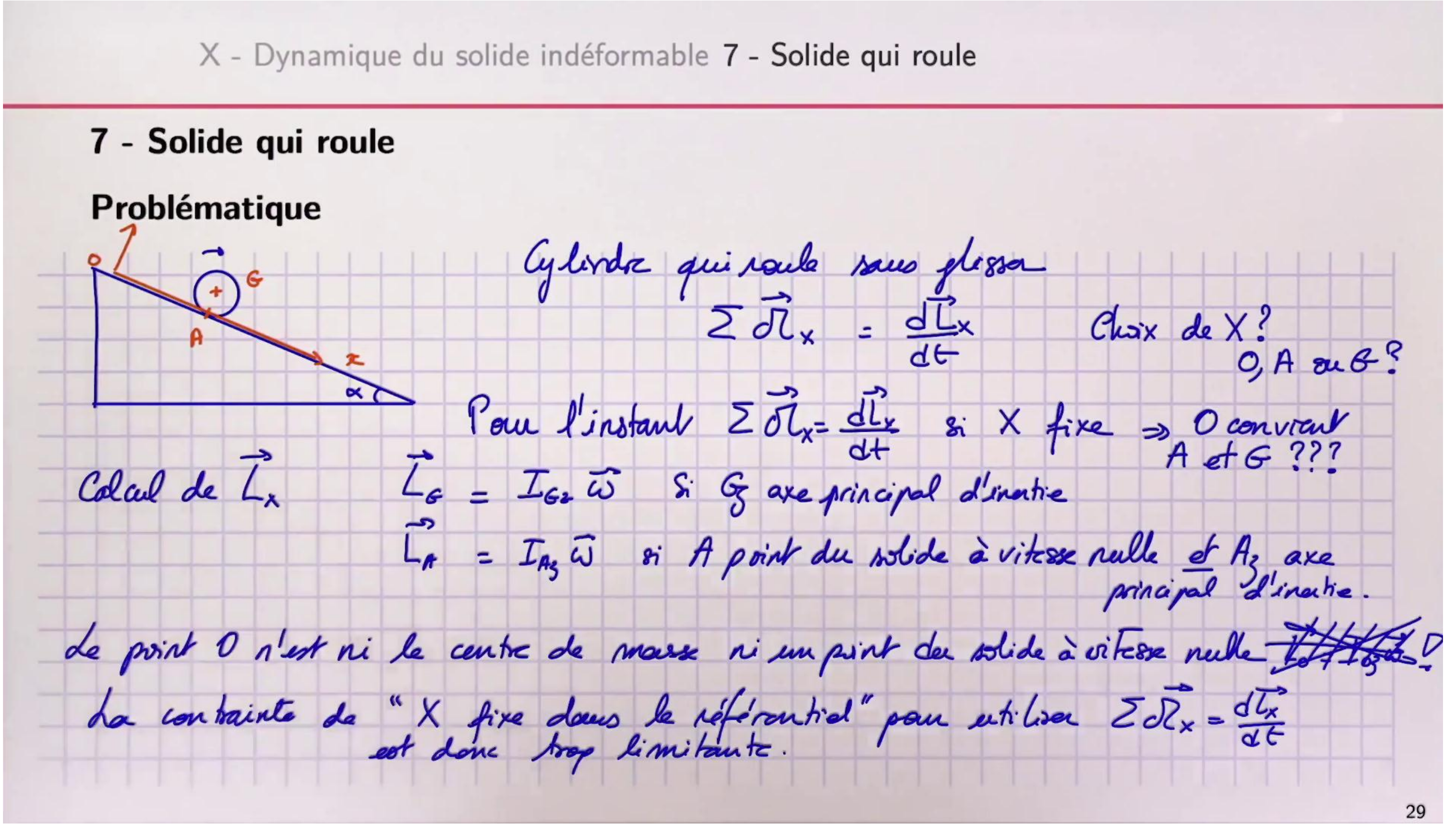


Je sais que le théorème du moment cinétique est valable par rapport à O, mais je ne sais pas s'il est valable par rapport à A ou par rapport à G. En effet, pour l'instant, nous n'avons travaillé qu'avec un point fixe du référentiel. Donc O convient, mais A et G ne sont pas fixes. A priori, ils ne pourraient ne pas convenir. Par ailleurs, pour que ce théorème du moment cinétique soit utile, je dois être capable de calculer le moment cinétique. Nous avons vu qu'il est possible de calculer le moment cinétique par rapport au centre de masse à l'aide de L-G est égal à I-G-Z vecteur Oméga, si G-Z est un axe principal d'inertie. Pour notre cylindre, l'axe G-Z est en effet axe principal d'inertie. Toujours dans le cas de notre solide qui roule, le point de matière A du solide en contact avec le plan incliné est à vitesse nulle. On peut considérer qu'à chaque instant T, le cylindre est en rotation autour de A. Simplement, le point A autour duquel se fait la rotation change au cours du temps. Je peux donc également écrire L-A est égal à I-A-Z Oméga, à condition que A soit un point du solide à vitesse nulle et A-Z, axe principal d'inertie. Puisque le solide roule sans glisser, j'ai le même vecteur Oméga dans les deux cas.

Notes

Summary

2m 24s

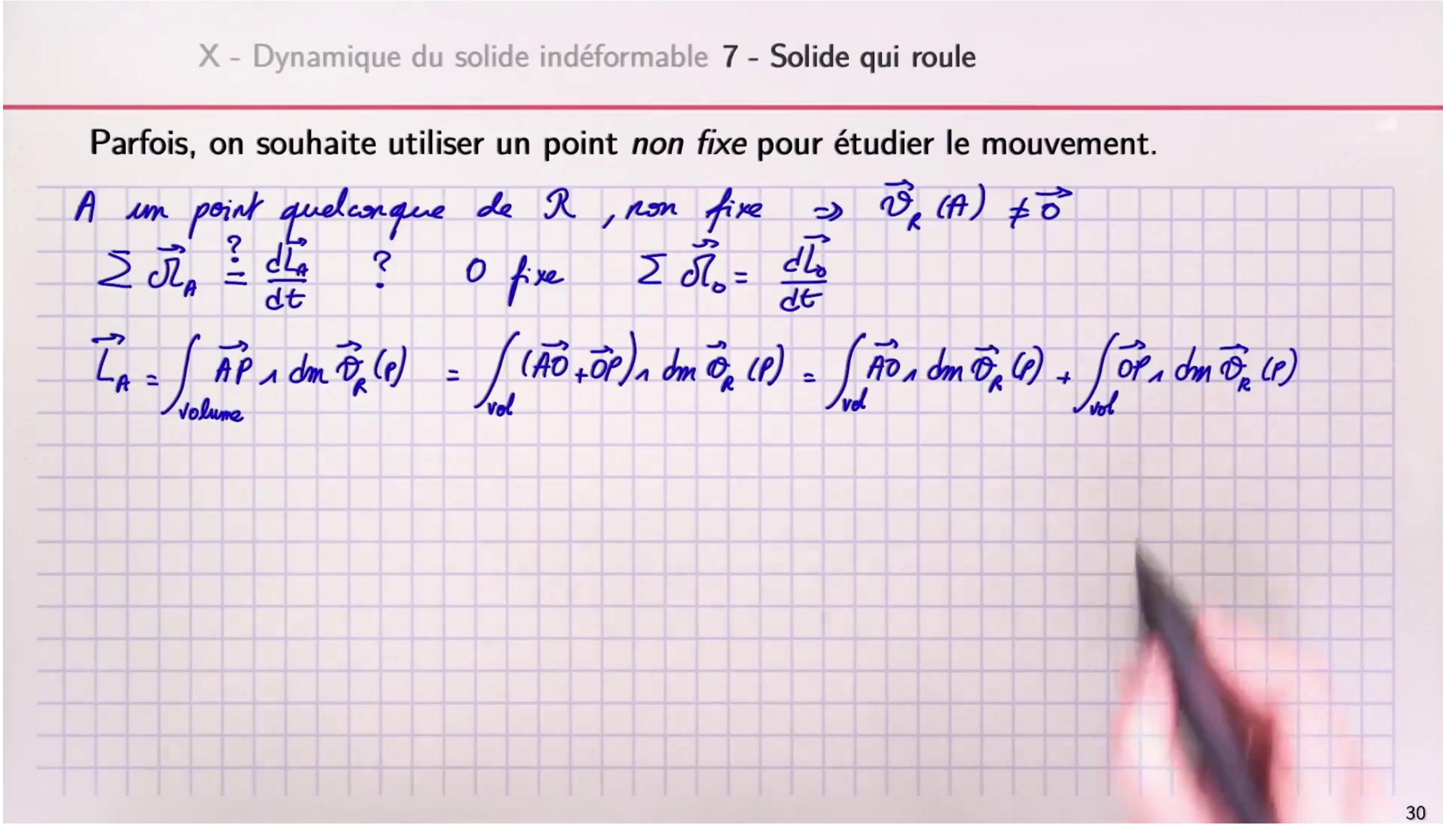


Par contre, le point O n'est ni le centre de masse, ni un point du solide à vitesse nulle. Je ne peux donc pas écrire L-O égal I-O-Z Oméga, cela n'a pas de sens. Je me retrouve donc avec un problème pour utiliser le théorème du moment cinétique. En effet, je sais qu'il est valable par rapport au point O, mais je n'ai pas de moyen de calculer L-O simplement. Je sais que je peux calculer L-A et L-G simplement grâce à I-G-Z Oméga ou I-A-Z Oméga, mais je ne sais pas si le théorème du moment cinétique est valable par rapport à G ou par rapport à A. La contrainte que nous nous sommes fixée de X fixe dans le référentiel pour utiliser le théorème du moment cinétique est donc trop limitante. Nous allons voir comment étendre le théorème du moment cinétique.

Notes

Summary

4m 25s

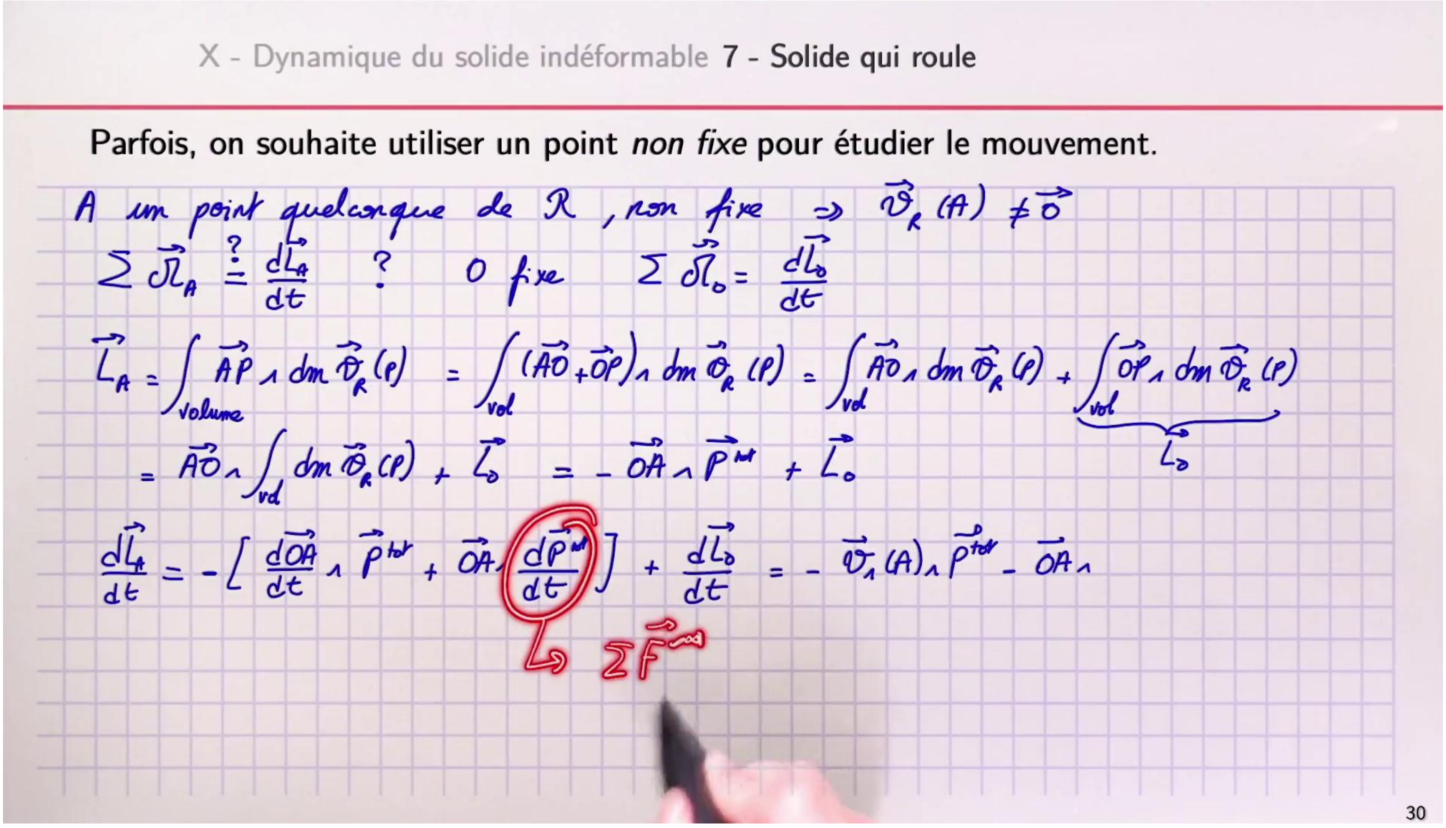


Nous allons donc voir comment faire lorsqu'on souhaite utiliser un point non fixe pour étudier le mouvement. Je vais prendre A, un point quelconque de R non fixe. Cela signifie que la vitesse dans R de A est différente du vecteur nul. La question que je me pose est dans quelle mesure ai-je le droit d'utiliser somme des moments des forces par rapport à A égal D-L-A sur D-T. Je sais que pour O fixe, je peux utiliser somme des moments des forces par rapport à O égal D-L-O sur D-T. Je vais maintenant partir de cette relation et chercher à remplacer O par A. Pour cela, je vais écrire le moment cinétique par rapport à A comme l'intégrale sur le volume de A-P vectoriel D-M, V dans R de P. Donc, je fais une intégrale sur les points P appartenant au volume du solide. Puisque j'ai théorème du moment cinétique en O, je vais introduire le point O entre A et P, ce qui me donnera l'intégrale sur le volume de A-O plus O-P vectorielle D-M, V dans R de P. Je peux séparer mon intégrale en deux au niveau de la somme, et avoir l'intégrale sur le volume de A-O vectorielle D-M, V dans R de P plus l'intégrale sur le volume de O-P vectorielle D-M, V dans R de P. Ce deuxième terme n'est rien d'autre que le moment cinétique par rapport à L-O.

Notes

Summary

5m 29s



Je vais donc avoir un lien entre L-A et L-O, mais j'ai ici un terme supplémentaire. Cette intégrale est une intégrale sur le volume du solide avec les points P appartenant au volume. Ni A ni O ne dépendent de P. Je peux donc sortir ce terme de l'intégrale. L'intégrale sur le volume de D-M, V dans R de P, n'est rien d'autre que l'intégrale sur le volume de l'élément de quantique de mouvement, c'est donc la quantité de mouvement totale du solide. Par ailleurs, je vais réécrire le vecteur A-O comme étant moins O-A. Le théorème du moment cinétique utilise la dérivée de L-A. Je vais donc dériver L-A par rapport au temps. C'est-à-dire que je dois dériver cette somme par rapport au temps. La dérivée du premier terme est donc la dérivée d'un produit vectoriel, c'est la dérivée de O-A vectorielle, la quantité de mouvement total, plus O-A vectorielle, la dérivée de P, plus la dérivée par rapport au temps de L-O. La dérivée par rapport au temps de O-A est la vitesse dans R de A qui est non nulle. La dérivée de la quantité de mouvement est la somme des forces extérieures. Somme des forces extérieures égale D-P sur D-T.

Notes

Summary

7m 29s

X - Dynamique du solide indéformable **7 - Solide qui roule**

Parfois, on souhaite utiliser un point *non fixe* pour étudier le mouvement.

A un point quelconque de $\mathcal{R}$, non fixe $\Rightarrow \vec{v}_R(A) \neq \vec{0}$

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_A \overset{?}{=} \frac{d\vec{L}_A}{dt} \quad ? \qquad O \text{ fixe} \quad \sum \vec{\mathcal{M}}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

$$\vec{L}_A = \int_{volume} \vec{AP} \wedge dm\, \vec{v}_R(P) = \int_{vol} (\vec{AO} + \vec{OP}) \wedge dm\, \vec{v}_R(P) = \int_{vol} \vec{AO} \wedge dm\, \vec{v}_R(P) + \underbrace{\int_{vol} \vec{OP} \wedge dm\, \vec{v}_R(P)}_{\vec{L}_O}$$

$$= \vec{AO} \wedge \int_{vol} dm\, \vec{v}_R(P) + \vec{L}_O = -\vec{OA} \wedge \vec{P}^{tot} + \vec{L}_O$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = -\left[\frac{d\vec{OA}}{dt} \wedge \vec{P}^{tot} + \vec{OA} \wedge \frac{d\vec{P}^{tot}}{dt} \right] + \frac{d\vec{L}_O}{dt} = -\vec{v}_R(A) \wedge \vec{P}^{tot} - \vec{OA} \wedge \sum \vec{F}^{ext} + \sum \vec{\mathcal{M}}_O$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = -\vec{v}_R(A) \wedge (M \vec{v}_R(G)) + \sum \vec{AO} \wedge \vec{F}^{ext} + \sum \vec{OP}_{ap} \wedge \vec{F}^{ext}$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = -M \vec{v}_R(A) \wedge \vec{v}_R(G) + \underbrace{\sum \underbrace{(\vec{AO} + \vec{OP}_{ap})}_{\vec{AP}} \wedge \vec{F}^{ext}} \rightarrow \sum \vec{AP}_a \wedge \vec{F}^{ext} = \sum \vec{\mathcal{M}}_A$$

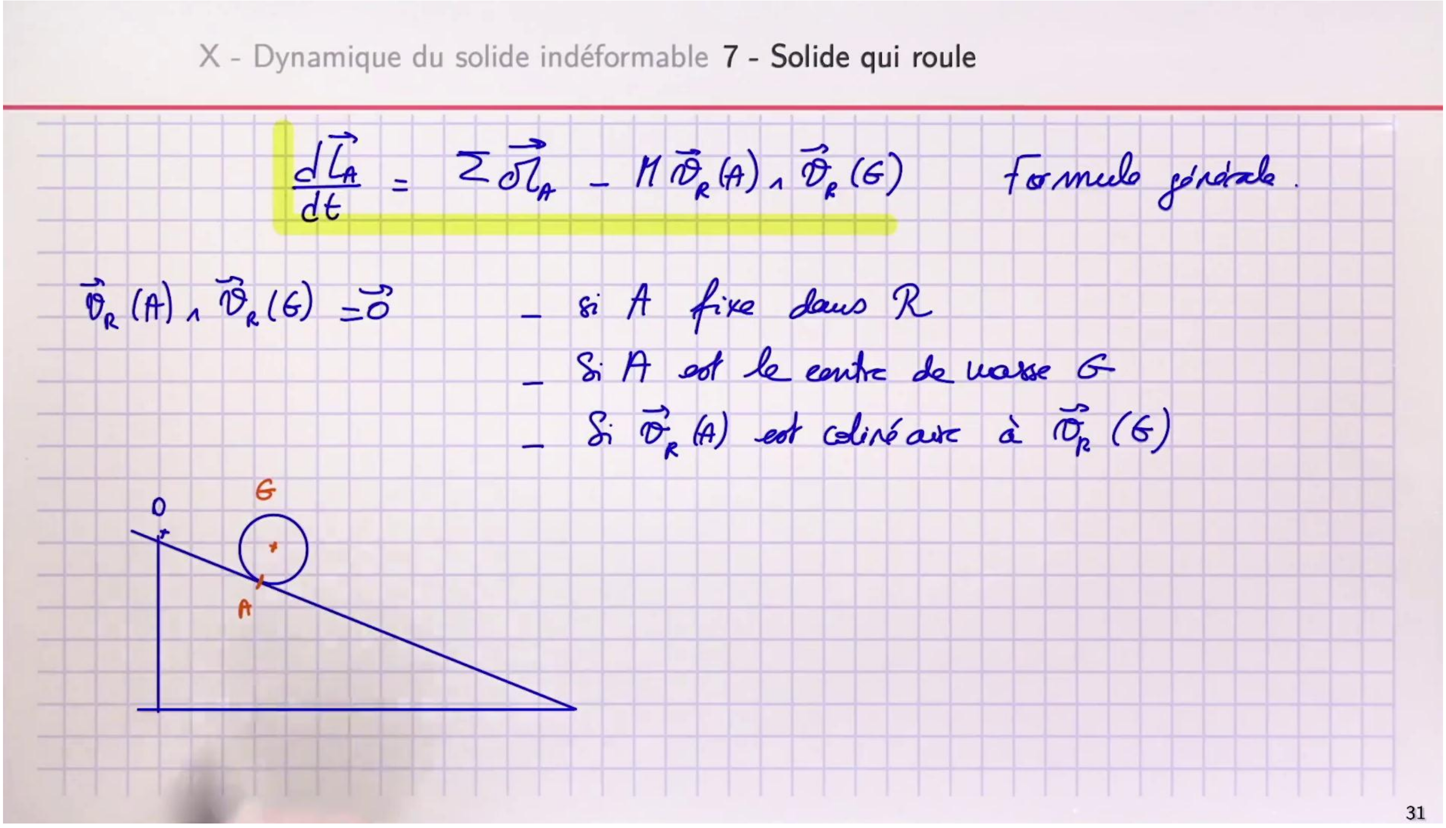
30

Et si j'utilise le théorème du moment cinétique en haut, celui-là, je sais qu'il marche, je peux remplacer D-L-O sur D-T par somme des moments des forces. Somme des moments des forces extérieures par rapport à O. Jusqu'à présent, extérieur était implicite, disons-le. J'ai donc D-L-A sur D-T est égal à moins V dans R de A, produit vectoriel la quantité de mouvement totale, c'est la masse multipliée par la vitesse dans R du centre de masse. Plus, je vais re-retourner ce O-A pour en faire un A-O, et je vais le rentrer dans la somme des forces. C'est donc la somme sur toutes les forces externes de A-O, produit vectoriel, les forces. Par ailleurs, la somme des moments des forces par rapport à O, est la somme des O point d'application, produit vectoriel avec les forces. J'obtiens donc D-L-A sur D-T est égal à moins grand M, produit vectoriel V dans R de A, vectoriel V dans R de G, plus la somme sur toutes les forces externes de A-O plus O-P application produits vectoriels forces externes. Ce vecteur là est le vecteur A-P. J'obtiens donc comme terme ici, la somme sur toutes les forces de A, point d'application vectorielle F-ext. Et ceci est la somme des moments des forces par rapport à A. J'ai donc D-L-A sur D-T égale somme des moments des forces par rapport à A plus un terme supplémentaire.

Notes

Summary

9m 11s

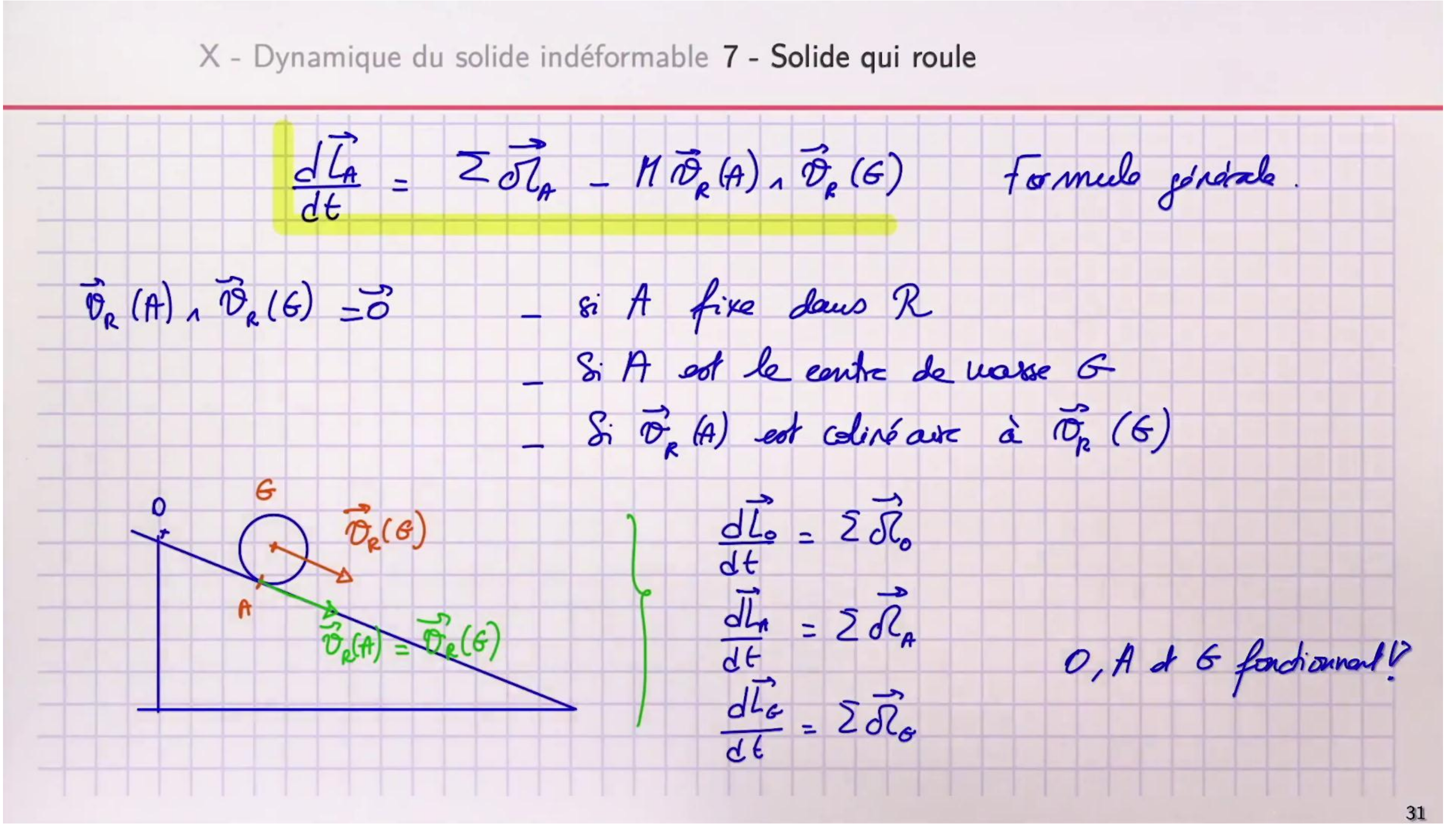


Et ce terme supplémentaire s'écrit moins masse totale V dans R de A, produit vectorielle V dans R du centre de masse. Cette formule est générale. Nous n'avons fait aucune supposition sur le point A. Maintenant, si je souhaite avoir quelque chose qui est exactement comme le théorème du moment cinétique, par rapport à un point fixe, ce deuxième terme doit être nul. Le deuxième terme est nul dans trois cas, soit si A est un point fixe du référentiel. C'est rassurant, nous avons vu que nous pouvons calculer le théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe. Cela marchera aussi si A est le centre de masse. Dans ce cas, j'aurai V dans R de G vectorielle V dans R de G, ce sera zéro. Et de manière plus générale, cela fonctionnera aussi si la vitesse dans R de A est colinéaire à la vitesse dans R du centre de masse. Reprenons le cas de notre cylindre qui roule sur un plan incliné. O était un point fixe du référentiel. A est le point de contact du cylindre avec le plan incliné, G est le centre de masse. Puisque j'ai un cylindre de forme parfaite homogène, le centre de masse est au centre du cylindre. Il est toujours à la distance R du plan incliné.

Notes

Summary

11m 21s

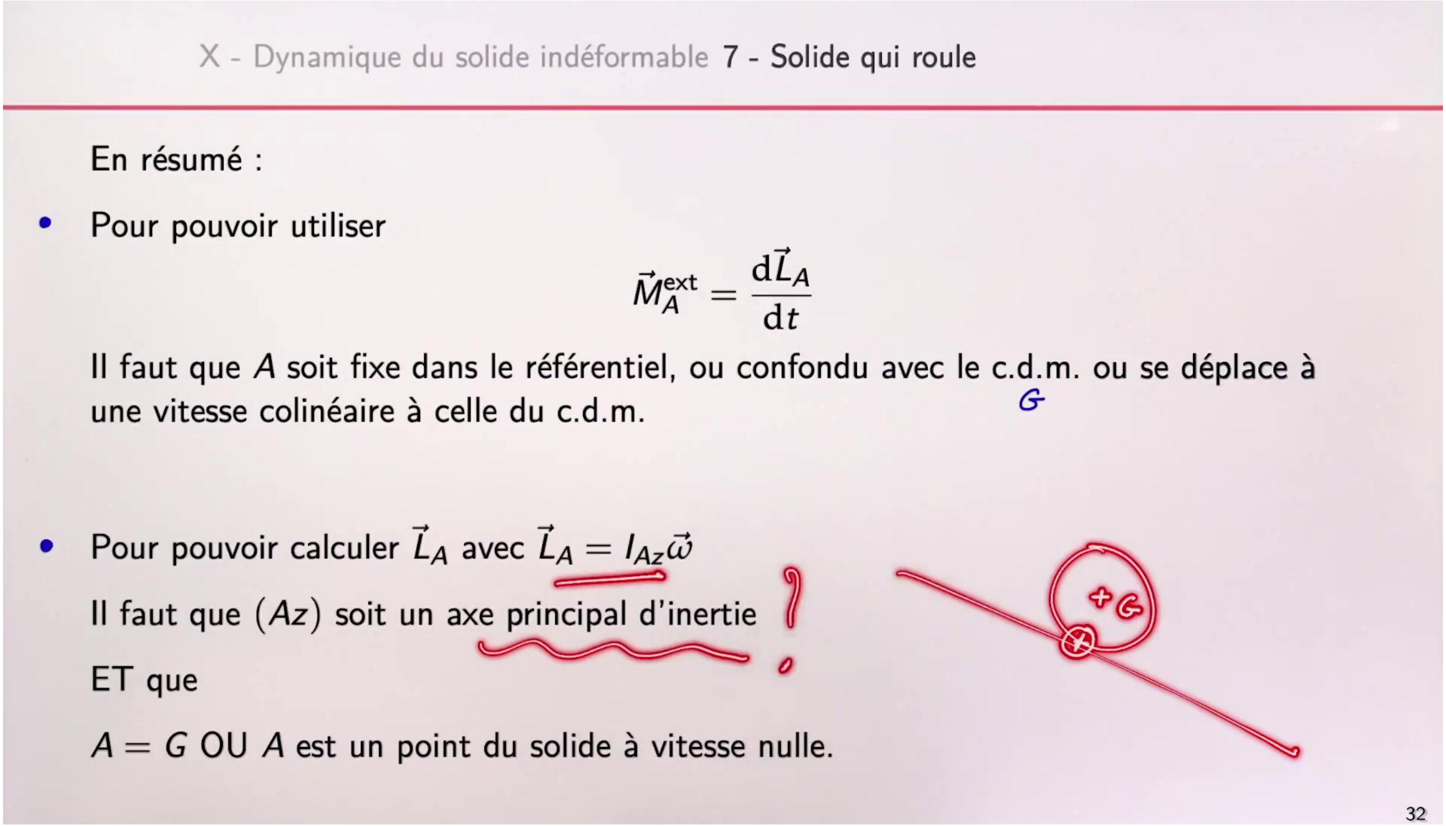


La vitesse du centre de masse est donc toujours colinéaire au plan incliné. Le point de référence A dans le référentiel change au cours du temps. À ne pas confondre avec le point de matière du solide qui est à vitesse nulle, mais il est à vitesse nulle à l'instant T. Un peu plus tard, j'ai un autre morceau de matière du solide et le point de référence, lui, a changé. Le point A a donc une vitesse dans R, et en fait, pour un cylindre qui roule, la vitesse dans R de A est égale à la vitesse dans R du centre de masse. Avec cela, je peux appliquer le théorème du moment cinétique par rapport à O, nous l'avons déjà vu, D-L-O sur D-T égale somme des moments des forces par rapport à O, mais également par rapport à A. D-L-A sur D-T égale somme des moments des forces par rapport à A puisque A a une vitesse colinéaire à celle du centre de masse, ou bien par rapport au centre de masse, D-L-G sur D-T égale somme des moments, des forces par rapport à G. Dans le cas qui nous intéresse, pour l'application du théorème du moment cinétique, les trois points O, A et G fonctionnent. En pratique, nous avons vu précédemment que pour le calcul de L, je devais me placer au point A ou au centre de masse. Donc, O ne sera pas une option, non pas à cause du théorème du moment cinétique, mais à cause du problème du calcul de L-O. Il me restera donc A et G.

Notes

Summary

12m 55s

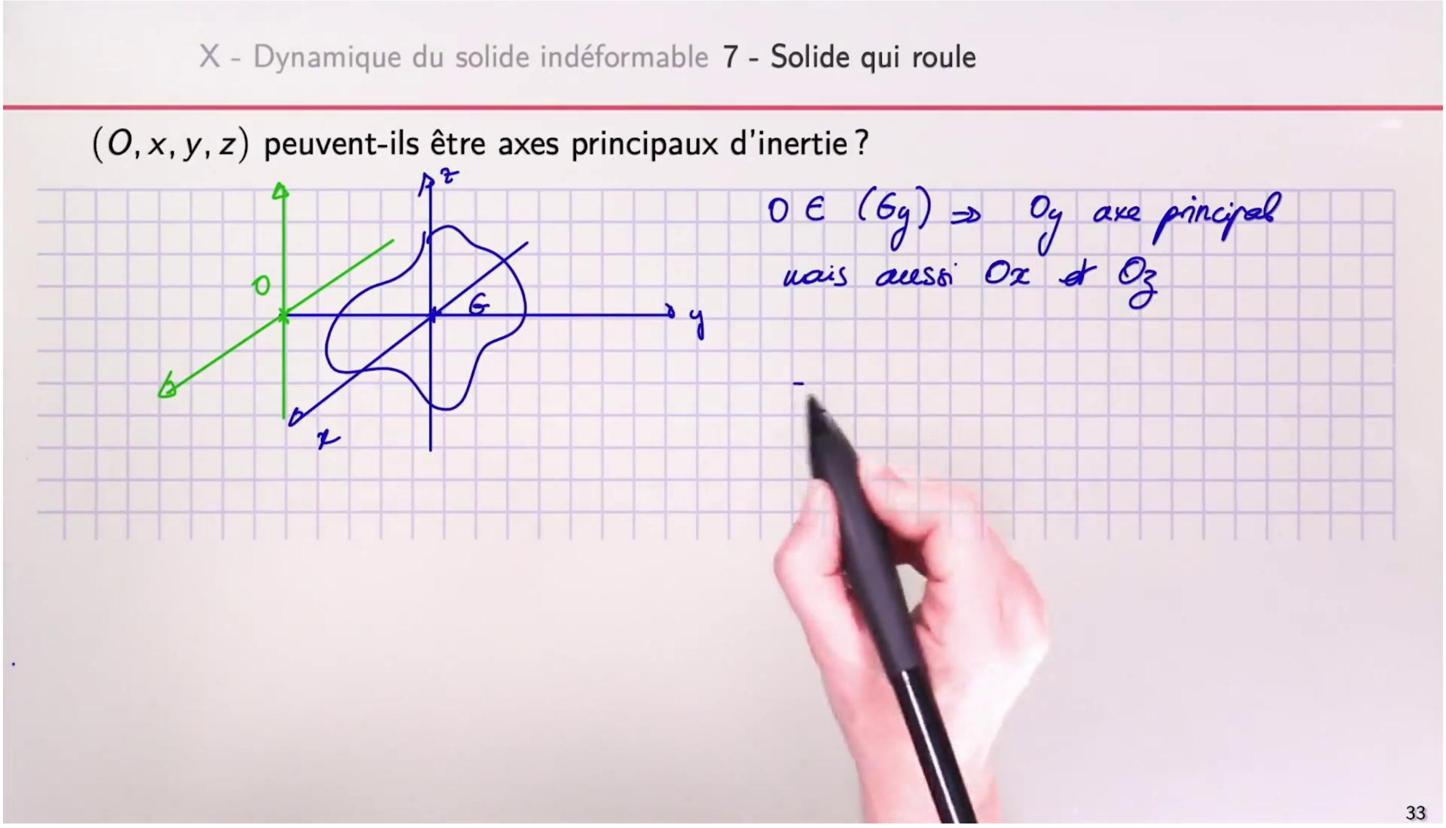


En résumé, puisque nous avons eu pas mal d'informations, pour pouvoir utiliser somme des moments des forces égale D-L-A sur D-T, il faut que A soit un point fixe dans le référentiel ou confondu avec le centre de masse, ou se déplace à une vitesse colinéaire à celle du centre de masse. Le centre de masse étant G. Ça, c'est le premier point. Par ailleurs, pour pouvoir calculer L-A à l'aide de L-A égal I-A-Z Oméga, il faut que A-Z soit un axe principal d'inertie et que A soit, soit le centre de masse, soit un point du solide à vitesse nulle. Il nous reste un problème pour le cas du cylindre qui roule sur un plan incliné. En effet, nous avons vu trois axes principaux d'inertie au moins passant par le centre de masse. Or, si nous vous souhaitons calculer L-A par rapport à A, il faut se demander si un axe A-Z peut être un axe principal d'inertie.

Notes

Summary

14m 46s

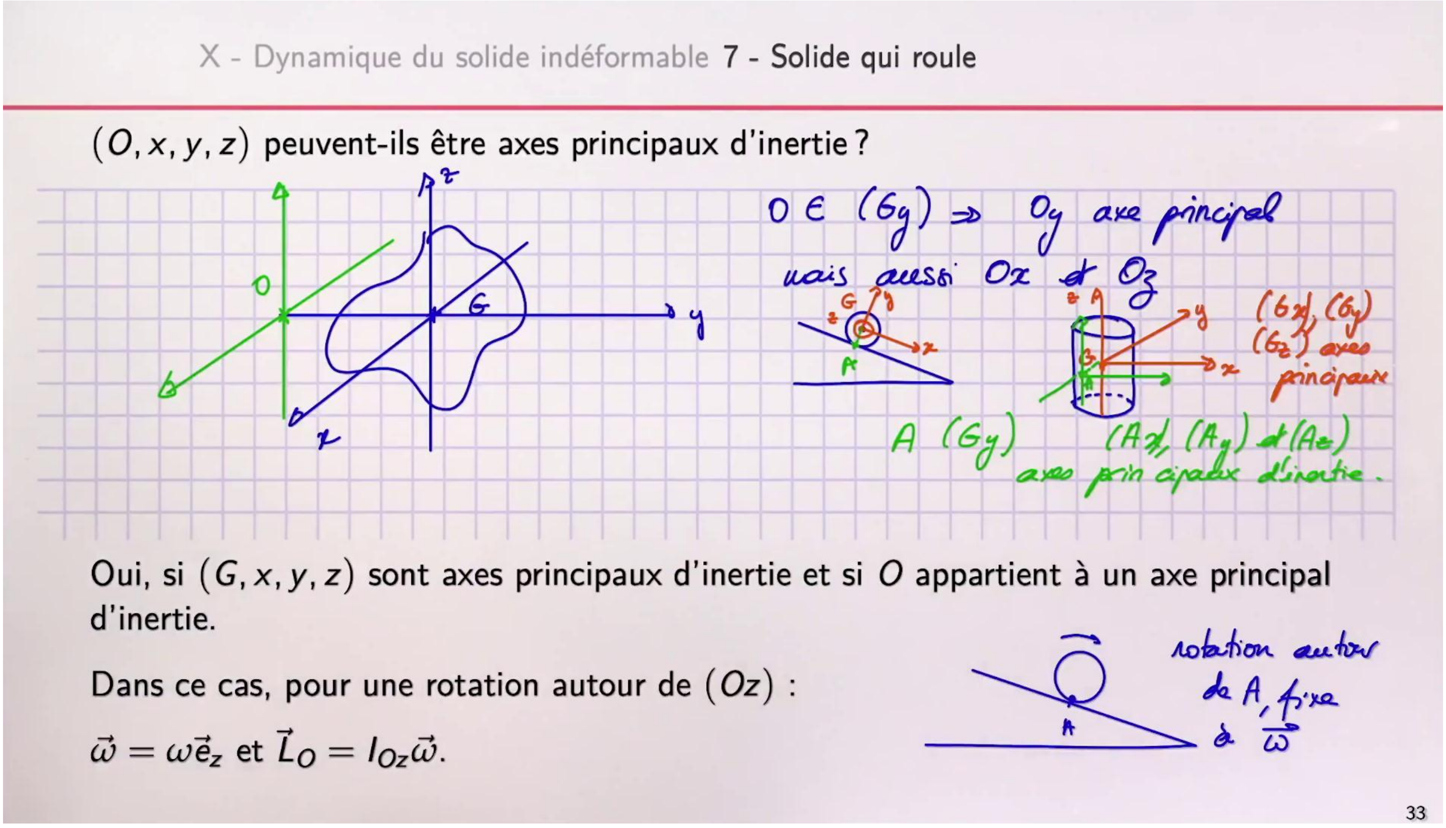


La question est donc à quelles conditions un système d'axes O-X-Y-Z peuvent-ils être axes principaux d'inertie ? Prenons le cas d'un objet quelconque de centre de masse grand G qui possède trois axes principaux d'inertie. On suppose que je les connais. Je vais les appeler Gx, Gy et Gz. Maintenant, imaginons que je choisisse un point O aléatoire dans mon référentiel. Dans quelle mesure le système d'axes O-X-Y-Z peut-il être un système d'axes principaux d'inertie ? Est-ce possible et à quelles conditions ? À nouveau, c'est quelque chose que je vous demande d'admettre sans vous le démontrer. Pour que cela fonctionne, il faut que O soit placé sur l'un de ces axes principaux d'inertie. Par exemple, si je le place sur l'axe G-Y, alors forcément, l'axe O-Y est un axe principal d'inertie puisque G-Y en est un et c'est le même axe. Mais en plus, l'axe O-X parallèle à G-X et l'axe O-Z parallèle à G-Z seront également axes principaux d'inertie. Pour le cas de notre solide qui roule, si je prends comme axe G-X parallèle au plan incliné, G-Y perpendiculaire à ce plan incliné, et donc X-Y-Z pointant hors de la feuille, je peux refaire un dessin avec le cylindre placé verticalement.

Notes

Summary

15m 53s

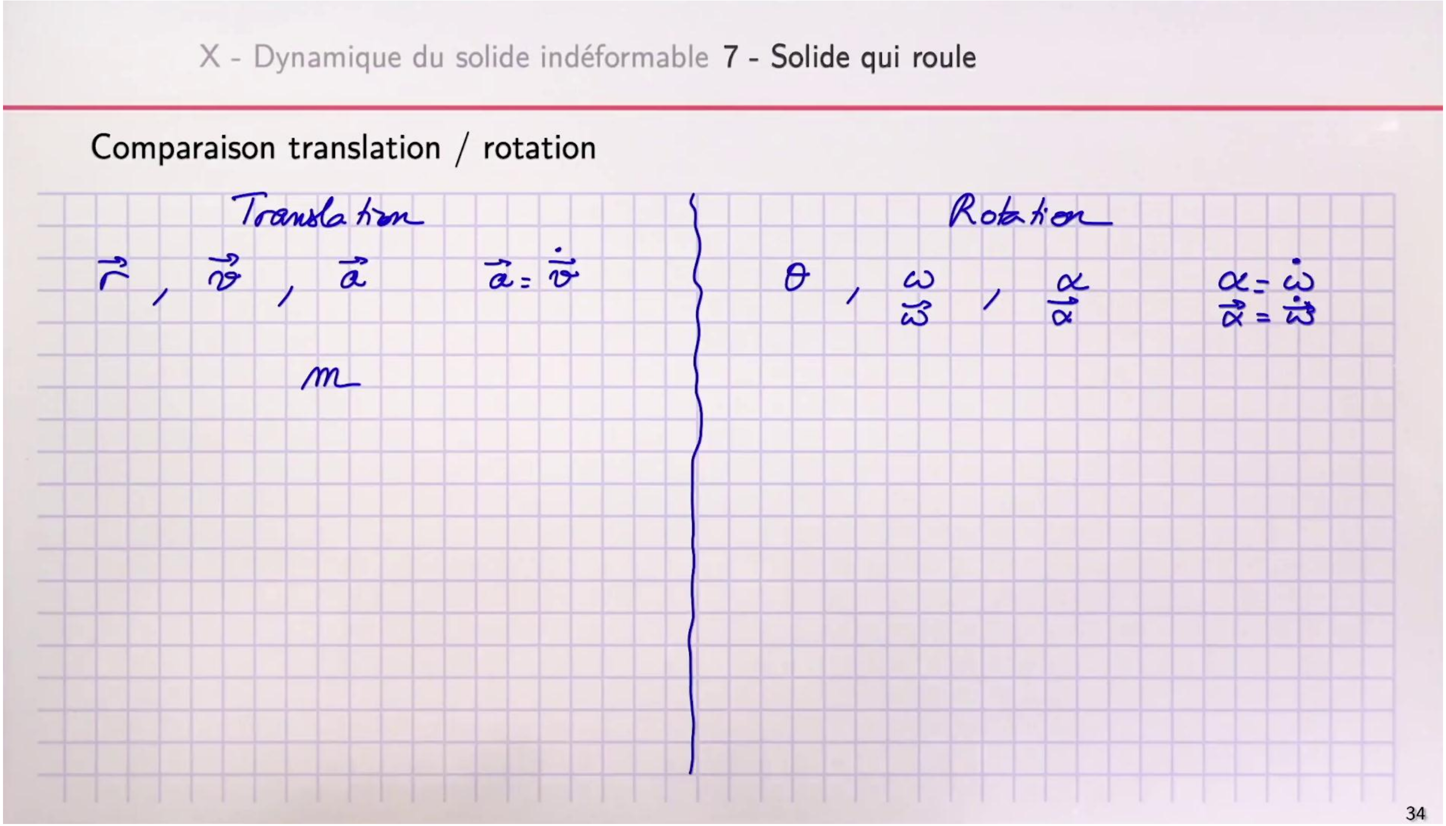


G-X et G-Y sont des axes perpendiculaires à l'axe de symétrie du cylindre et G-Z est l'axe de symétrie du cylindre. Ces trois axes G-X, G-Y, G-Z sont des axes principaux d'inertie. A est à l'extérieur du cylindre au point de contact. Il est en fait sur l'axe G-Y. A appartient donc à G-Y. Il appartient à un axe principal d'inertie. Les trois axes A-X, A-Y qui n'est autre que G-Y et A-Z sont des axes principaux d'inertie. Je pourrais donc facilement calculer L-A par rapport à cet axe principal A-Z. En résumé, à la question O-X-Y-Z peuvent-ils être axes principaux d'inertie ? La réponse est oui si j'ai un système G-X-Y-Z axes principaux d'inertie et si O appartient à un de ces trois axes principaux. Dans ce cas, pour une rotation autour de O-Z, ici, c'est A-Z, je pourrais utiliser Oméga E-Z, j'aurai donc une rotation autour d'un axe principal d'inertie, donc L-O égal I-O-Z Oméga. Pour finir avec notre histoire de cylindre qui roule, dans son mouvement de roulement, j'ai bien une rotation de l'objet autour du point fixe A. Par ailleurs, la vitesse angulaire de ce mouvement de rotation est la même que la vitesse angulaire du cylindre dans le référentiel centre de masse. Je pourrais donc facilement calculer L-A égal I-A-Z Oméga.

Notes

Summary

17m 40s

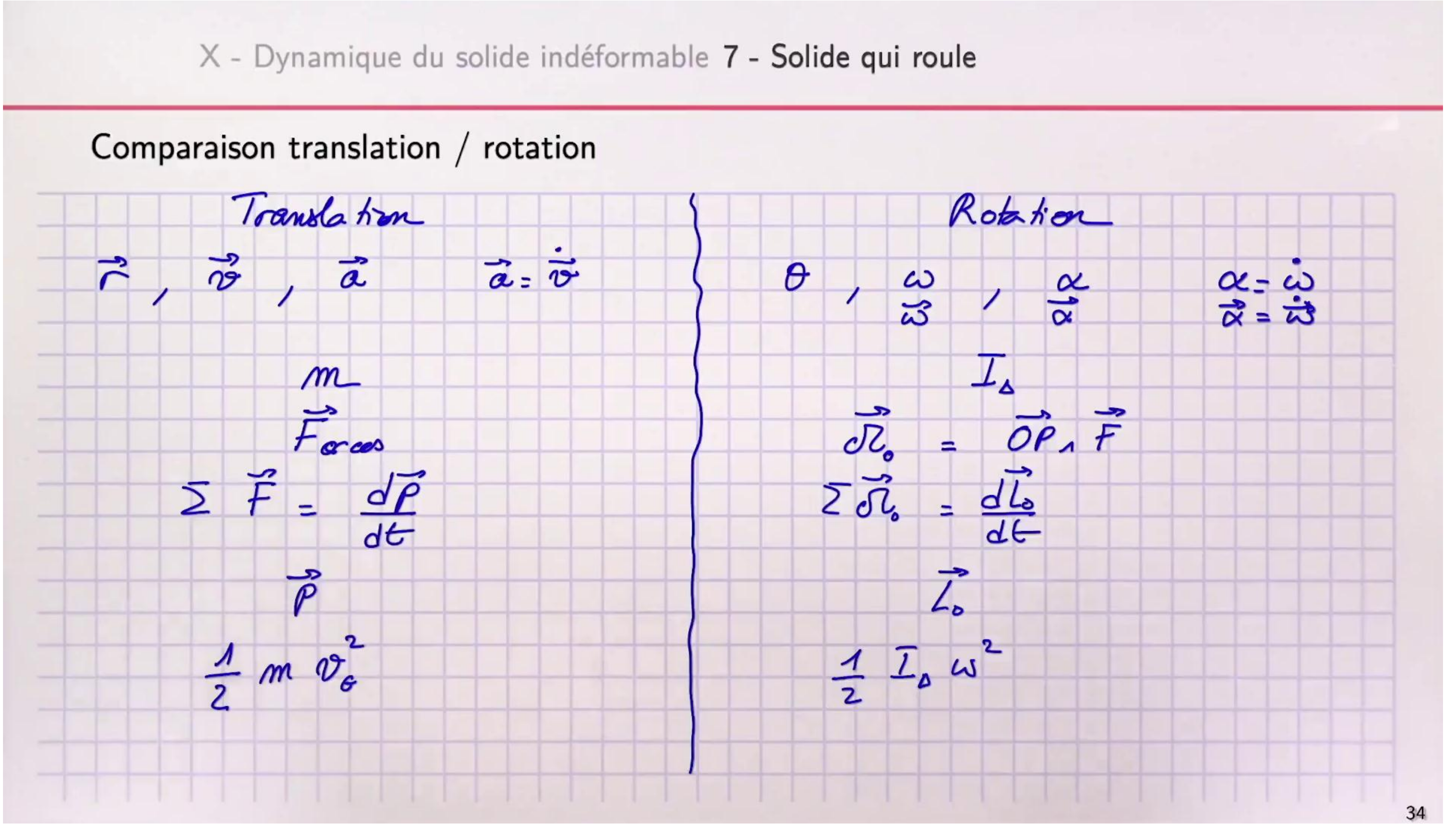


Nous avons vu maintenant l'intégralité des outils dans le cas d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation. Nous allons faire un petit retour sur l'ensemble des concepts que nous avons vus et comparer ce qui se passe en rotation et en translation. Nous avons vu en translation, la notion de vecteur position, vecteur vitesse et vecteur accélération. Pour le cas d'un mouvement de rotation, nous avions le vecteur rotation Oméga, mais nous avons aussi la position angulaire qui correspond à la position spatiale, la vitesse angulaire, généralement appelée Oméga, et l'accélération angulaire appelée Alpha. De même que l'accélération est la dérivée du vecteur vitesse, l'accélération angulaire est la dérivée du vecteur vitesse angulaire. Rajouter l'axe de rotation permet d'avoir un vecteur rotation et une accélération angulaire vectorielle. De la même façon, Alpha vecteur est égal à la dérivée d'Oméga vecteur. L'objet étudié a une masse M. C'est la masse inertielle qui s'oppose à la mise en mouvement et qui va apparaître dans les lois de Newton. L'équivalent en rotation est le moment d'inertie par rapport à un axe de rotation correspondant au vecteur rotation.

Notes

Summary

19m 34s

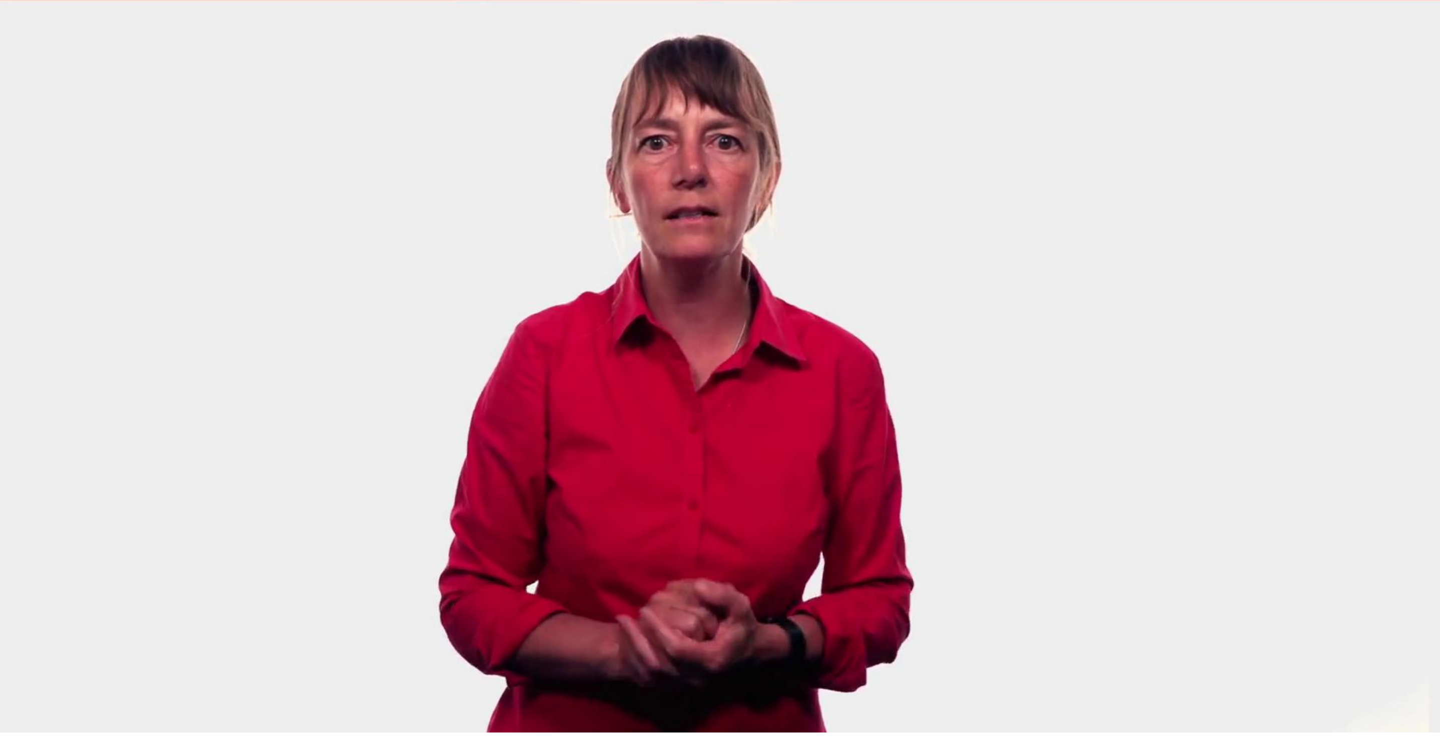


C'est l'inertie pour la mise en mouvement de rotation autour de Delta. La mise en mouvement, dans le cas de la translation, se fait avec les forces. La mise en mouvement pour la rotation se fait avec des moments de force par rapport à un point O. Ces moments de force se calculent comme O-P, point d'application vectoriel force. La deuxième loi de Newton s'écrit mathématiquement : somme des forces égale dérivée de la quantité de mouvement par rapport au temps. L'équivalent de ceci, c'est la somme des moments des forces est égale à D-L-O sur D-T. Cela nous permet de faire le parallèle entre quantité de mouvement et moment cinétique et de dire que l'équivalent de la quantité de mouvement en translation est le moment cinétique. Par ailleurs, nous avons vu qu'un objet en translation a une énergie cinétique un demi de M vitesse du centre de masse au carré et un objet en rotation a une énergie de rotation. En fait, une énergie cinétique de rotation un demi de I Delta Oméga carré. On retrouve donc la masse en parallèle du moment d'inertie et la vitesse de translation en parallèle de la vitesse angulaire.

Notes

Summary

21m 02s



Voilà, vous avez, avec la fin de cette vidéo, tous les outils nécessaires pour résoudre les problèmes que vous pourriez rencontrer dans le cadre du solide dans ce cours. Nous avons étendu l'utilisation du théorème du moment cinétique pour ne pas être obligé de se placer dans une rotation par rapport à un axe fixe. Dans la prochaine vidéo, je vous propose un court aperçu de la façon dont on traiterait le solide si on avait à notre disposition le calcul matriciel.

Notes

Summary

22m 26s