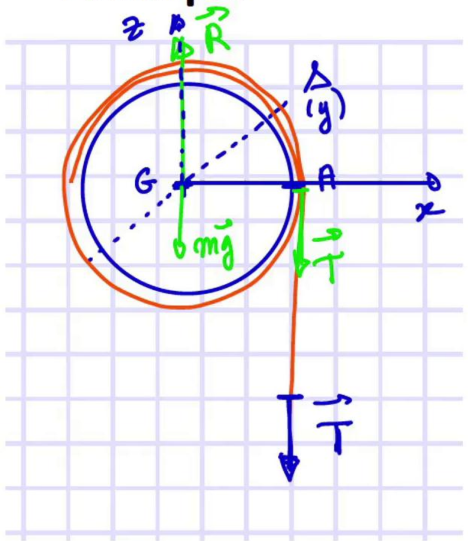
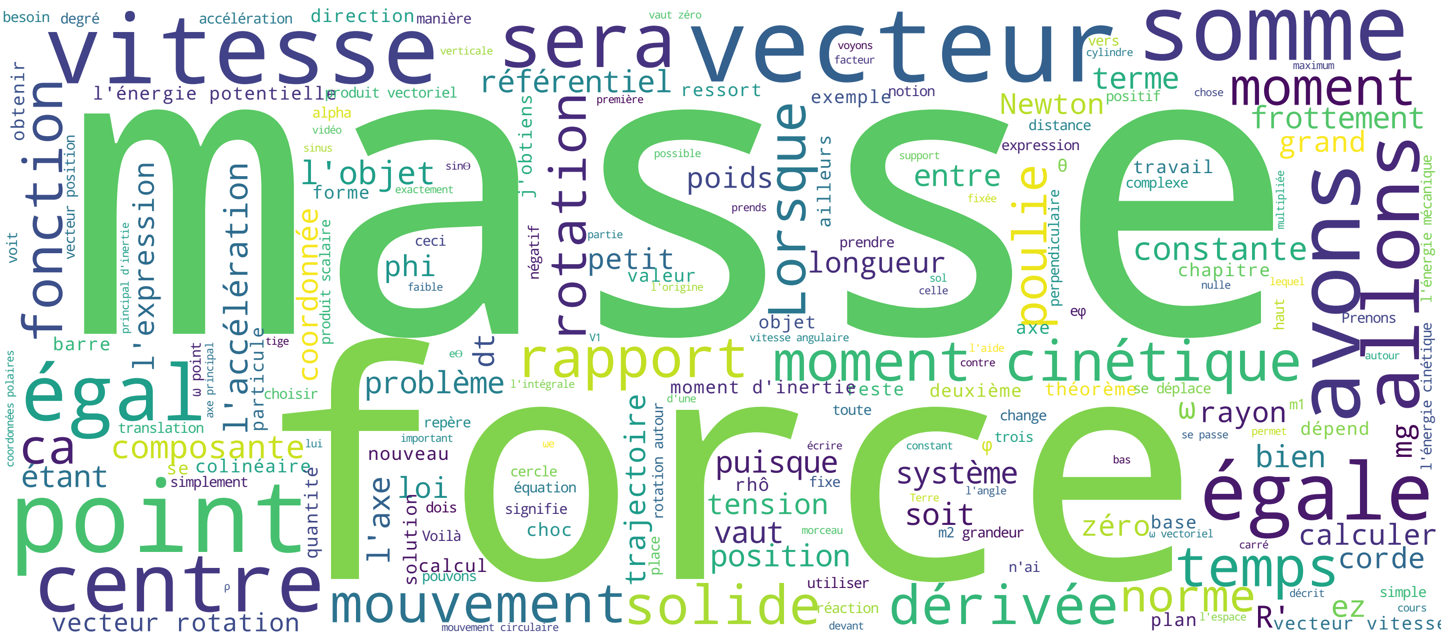
Exemple



Moment cinétique d'un solide

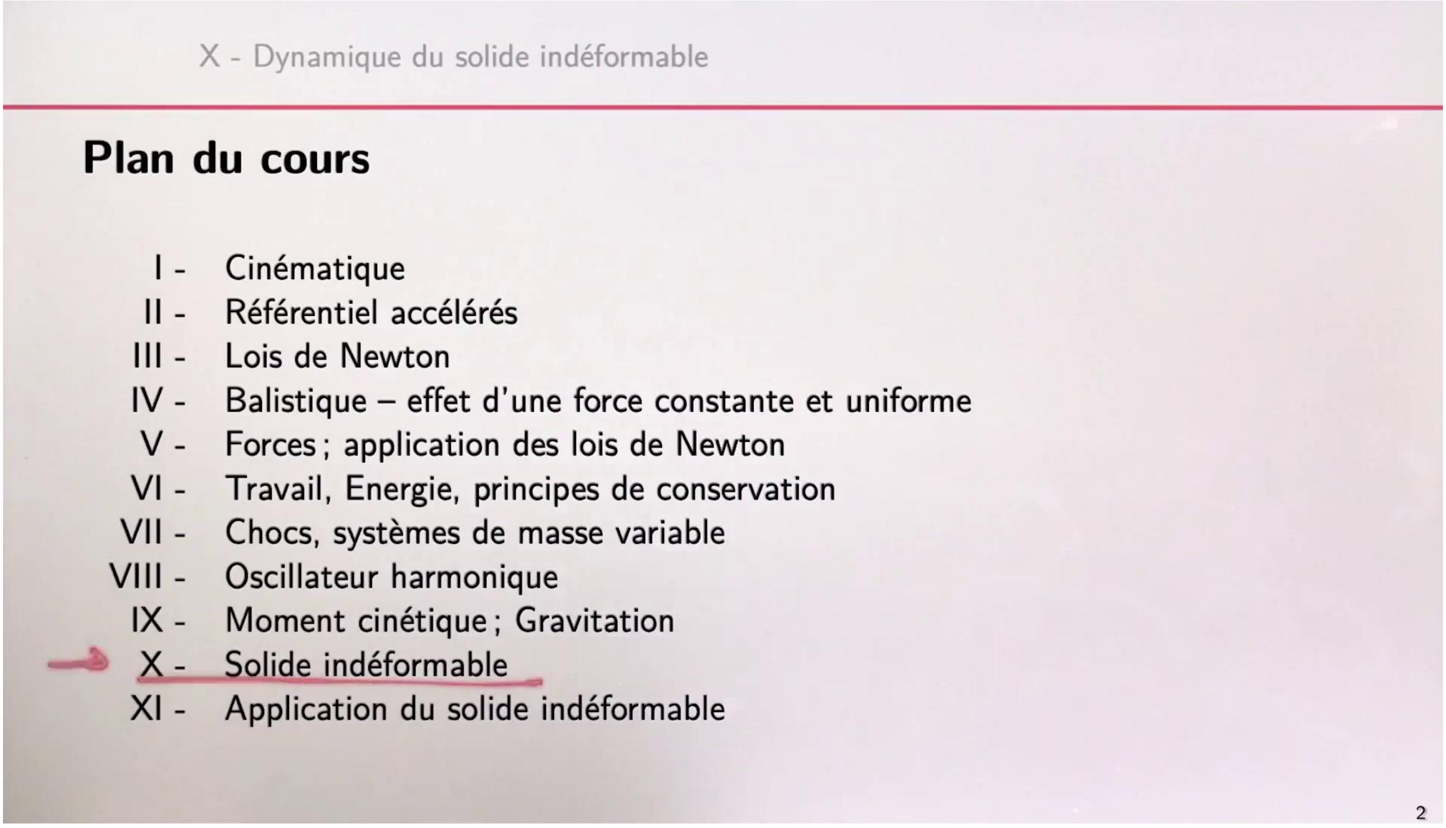
Partie2

Prof. Cécile Hébert



Video

EPFL

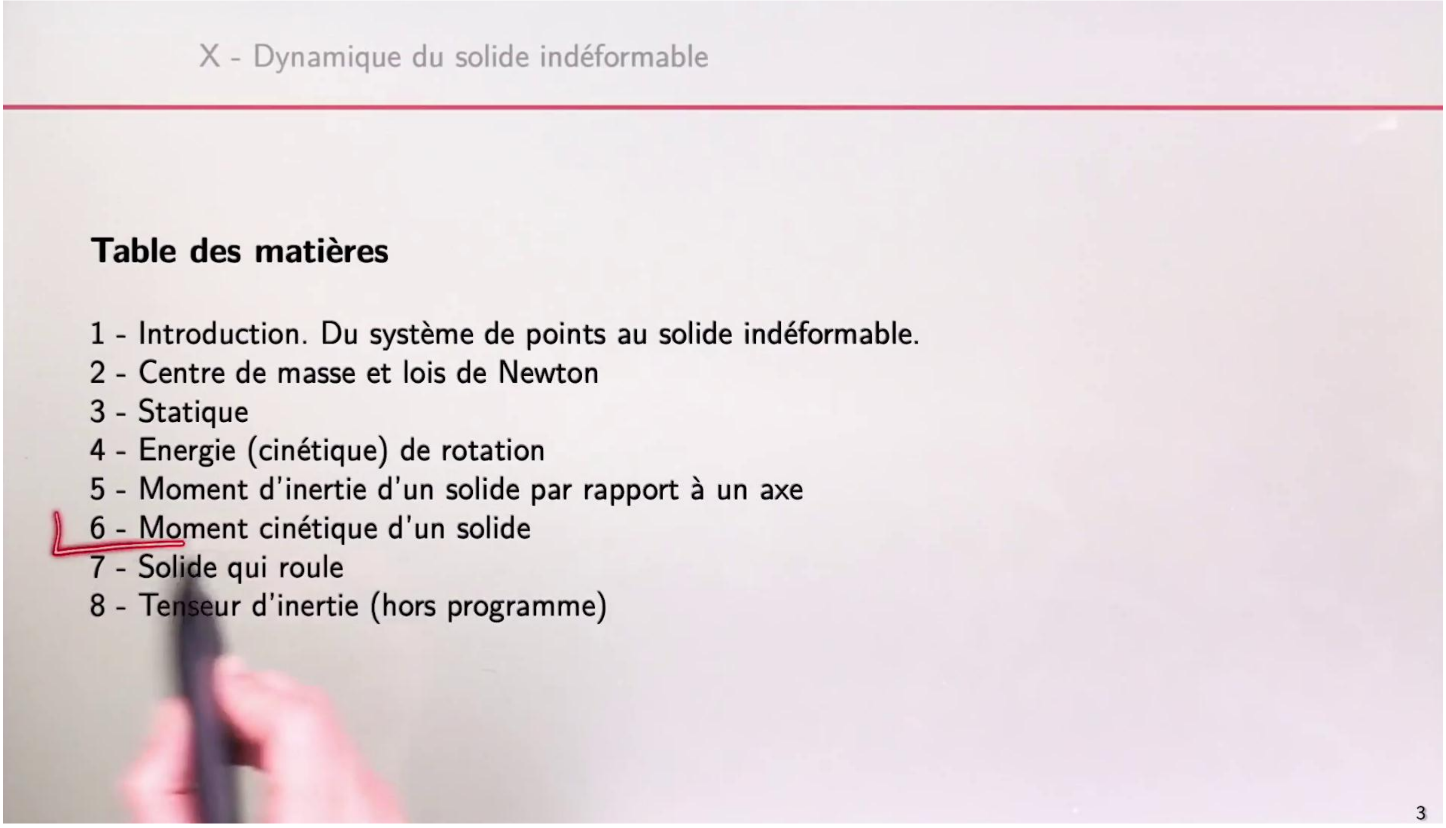


Dans cette vidéo, nous allons voir un exemple d'application de ce que nous avons vu précédemment, à savoir le moment cinétique d'un solide. Nous aurons un cas où nous pourrons calculer facilement le moment cinétique à l'aide du vecteur rotation et nous allons voir comment cela nous permettra de prédire le comportement du solide.

Notes

Summary

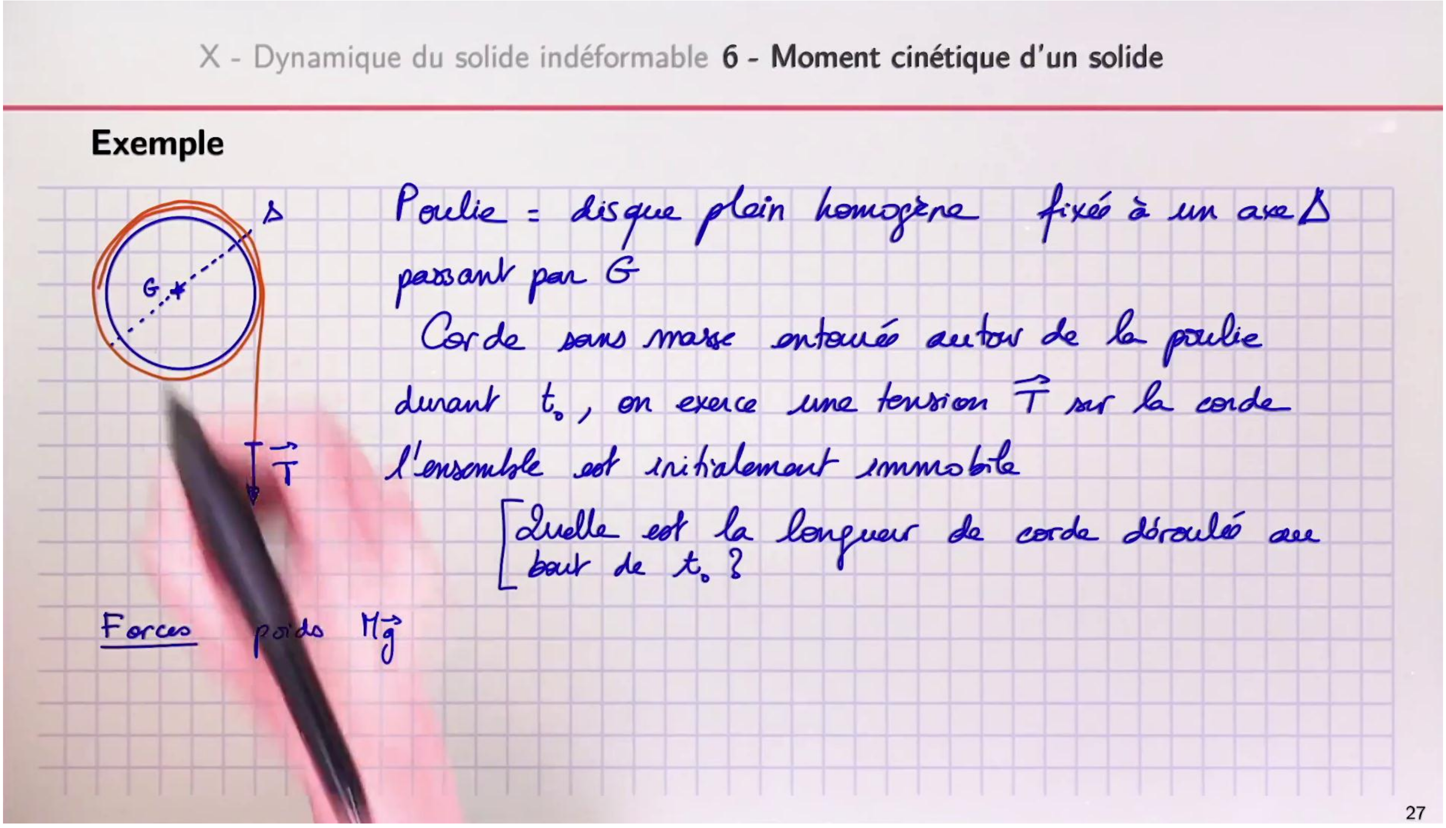
0m 05s



Notes

Summary

0m 28s

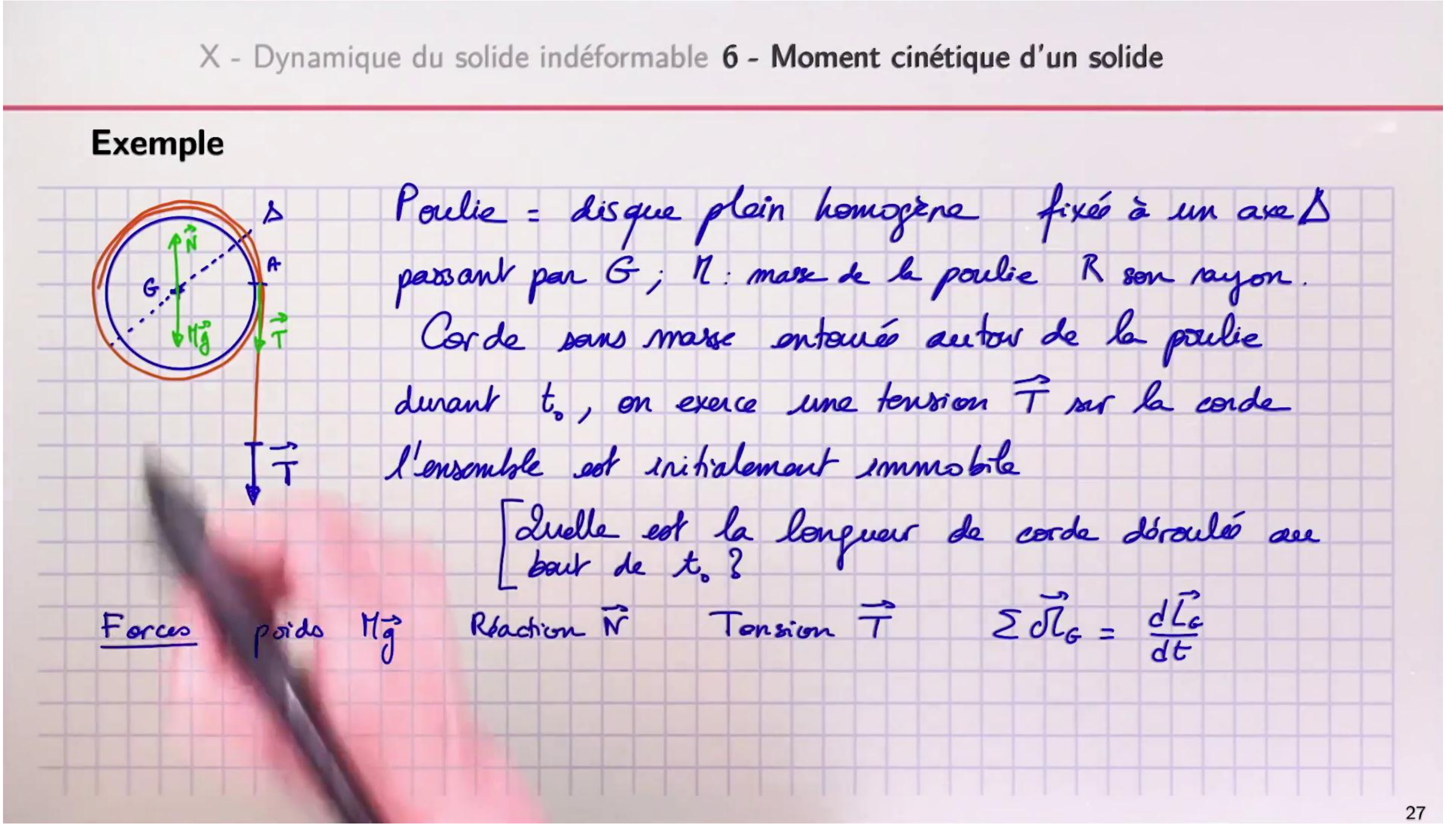


Nous sommes dans le chapitre 10 sur le solide indéformable et nous allons voir un exemple d'application de la notion de moment cinétique d'un solide. Prenons le cas suivant. Nous avons une poulie qui est considérée comme un disque plein homogène. Cette poulie est fixée à un axe passant par le centre de masse G. Je vais appeler δ cet axe. Je place une corde enroulée autour de cette poulie. La corde est sans masse. À partir de t = 0, j'exerce une tension T dans la corde. J'exerce cette tension pendant un temps t0. L'ensemble est initialement immobile et la question que je pose est quelle est la longueur de corde déroulée au bout de t0 ? Pour connaître la longueur de corde déroulée, je vais donc devoir connaître la distance angulaire parcourue par la poulie dans sa rotation. La poulie est fixée par son centre de masse. Il n'y a donc pas de déplacement global de l'ensemble. Il n'y a qu'une mise en rotation. La somme des forces extérieures vaudra 0 sur la poulie, mais la somme des moments des forces ne sera pas nulle. Il nous faut faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur la poulie. Nous avons déjà le poids Mg, si M est la masse de la poulie. La poulie est fixée par un axe qui va exercer une réaction.

Notes

Summary

0m 25s



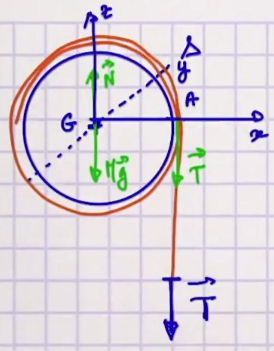
Nous appellerons N. Et par ailleurs, comme la corde est sans masse, elle transmet les tensions. La tension se retrouve donc exercée par la corde sur la poulie au point A, endroit où la corde se détache de la poulie. Nous pouvons donc représenter les forces sur le dessin en faisant attention aux points d'application, puisque pour le solide, c'est important. Nous aurons dans la suite besoin de la masse de la poulie et de son rayon. Je vais donc définir M, la masse de la poulie, et R, son rayon. Dans le bilan des forces, je peux donc ajouter la tension T. La poulie est fixe, son centre de masse ne bouge pas. Le but est d'analyser sa rotation. Je vais donc avoir besoin du théorème du moment cinétique. Il me faut choisir le point d'application. Dans le cas présent, la poulie est fixée par son centre de masse, deux des forces s'appliquent au centre de masse. Appliquer le théorème du moment cinétique au centre de masse est donc un bon choix. Nous écrirons donc que la somme des moments des forces extérieures par rapport au centre de masse est égale à dLg/dt, Lg étant le moment cinétique par rapport au centre de masse. La rotation se faisant autour de l'axe δ, ce sera le moment cinétique pour une rotation autour de δ.

Notes

Summary

2m 00s

Exemple



Poulie = disque plein homogène fixé à un axe Δ passant par G ; M : masse de la poulie R son rayon.

Corde sans masse entourée autour de la poulie

durant t_0, on exerce une tension $\vec{T}$ sur la corde

l'ensemble est initialement immobile

[Quelle est la longueur de corde déroulée au bout de t_0 ?

Forces : poids $M\vec{g}$ Réaction $\vec{N}$ Tension $\vec{T}$ $\quad \sum \vec{\mathcal{M}}_G = \frac{d\vec{L}_G}{dt}$

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_G = \underbrace{\cancel{\vec{GG}}}_{0} \wedge M\vec{g} + \underbrace{\cancel{\vec{GG}}}_{0} \wedge \vec{N} + \vec{GA} \wedge \vec{T} = R\vec{e_x} \wedge (-T\vec{e_z}) = RT\vec{e_y}$$

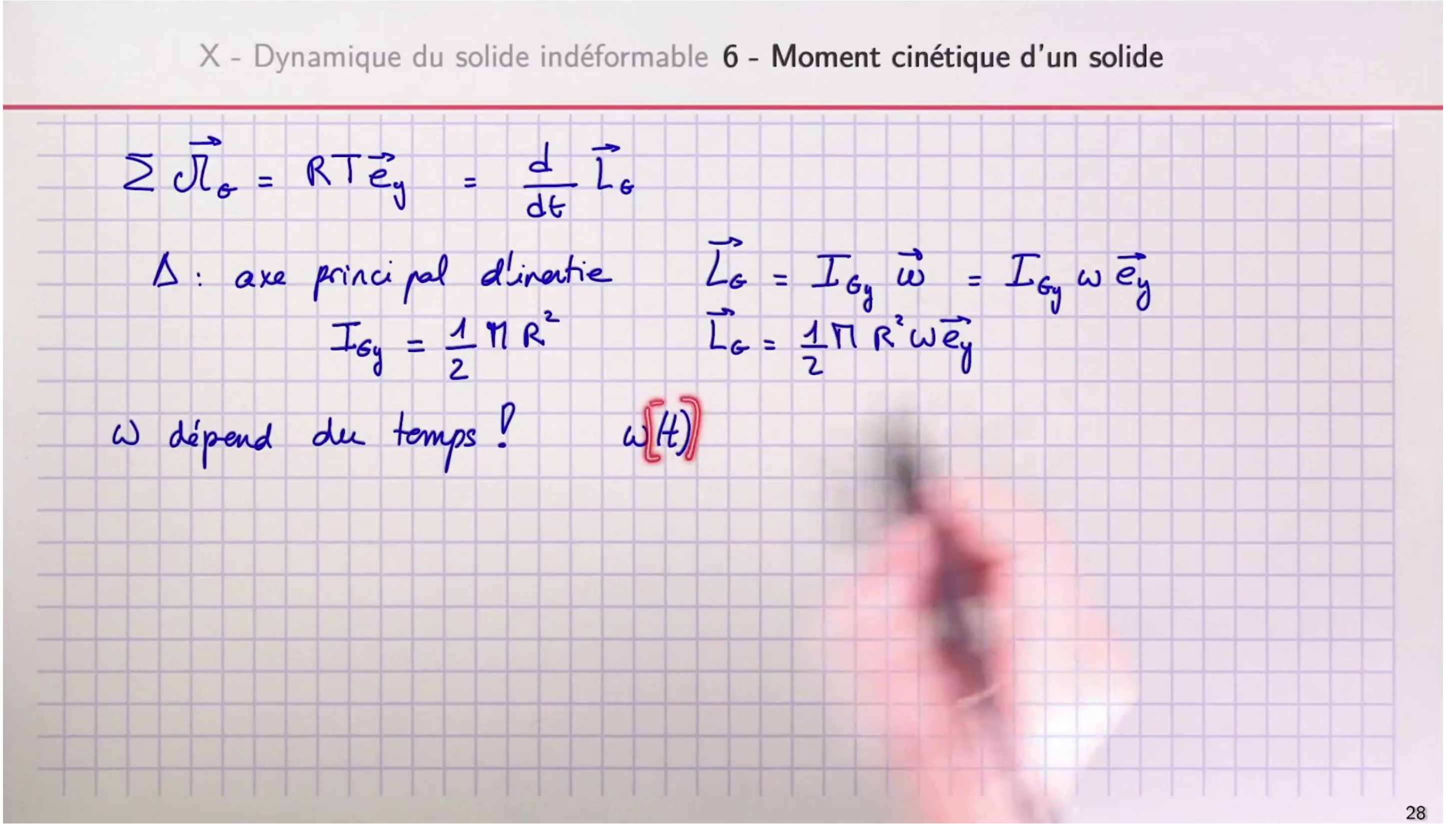
27

G est fixe dans le référentiel, je n'ai donc pas de problème pour l'utiliser. Commençons par exprimer la somme des moments, des forces. C'est comme d'habitude le produit vectoriel du point par rapport auquel je me place, ensuite, le point d'application de la force. Si je prends le poids, il s'applique au centre de masse, donc j'ai le vecteur GG, vectoriel Mg. C'est le moment du poids. Ensuite, le moment de la réaction, je vais obtenir GG, vectoriel N. Et pour finir, le moment de la tension GA, vectoriel T. Ce vecteur étant nul, ce premier terme disparaît. Même chose pour le deuxième. Il ne me reste donc plus que GA, vectoriel T. J'ai besoin d'exprimer ces deux vecteurs, je vais donc choisir un repère adapté. Le mieux est de choisir un axe Gx passant par A, un axe Gy qui est le même que l'axe δ et un axe Gz vertical. Cela me permet d'exprimer le vecteur GA comme étant le rayon de la poulie multiplié par le vecteur de base EX. Produit vectoriel de la tension T porté par le vecteur de base ez et avec mon repère vers les z négatifs. T, étant la norme de la tension, j'ai donc -T ez. ex vectoriel ez sera égal à -ey. Avec le (-) devant ici, cela me donnera ey. J'obtiens donc RT vecteur de base ey.

Notes

Summary

3m 33s



J'ai donc la première moitié dont j'ai besoin pour mon théorème du moment cinétique. La somme des moments des forces par rapport au centre de masse est égale à RT vecteur de base ey. C'est également égal à la dérivée par rapport au temps de Lg. Il me faut donc calculer maintenant le moment cinétique Lg. Puisque la rotation se fait autour de l'axe δ qui est un axe principal d'inertie, LG s'écrira tout simplement moment d'inertie par rapport à l'axe GY qui est l'axe de rotation multiplié par le vecteur rotation. C'est donc IɢYω vecteur de base ey. Nous connaissons le moment d'inertie d'un cylindre plein par rapport à son axe de rotation, c'est 1/2 MR^2. J'ai donc l'expression de Lg = 1/2 MR^2ωey. Nous cherchons la dérivée par rapport au temps de Lg. J'ai écrit simplement ce Lg = 1/2 MR^2ωey. 1/2 ne change pas, la masse, c'est la masse du cylindre, elle est constante. R est constant, ey c'est un vecteur de base qui ne bouge pas. Mais il faut bien faire attention. Ici, je n'ai pas écrit explicitement que ω est une fonction du temps et pourtant, c'en est une. C'est donc une fonction ω(t). À nouveau, nous avons laissé cette information implicite. Elle n'a pas été explicitée.

Notes

Summary

5m 36s

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_G = RT\vec{e}_y = \frac{d}{dt}\vec{L}_G$$

Δ : axe principal d'inertie $\qquad \vec{L}_G = I_{Gy}\vec{\omega} = I_{Gy}\,\omega\,\vec{e}_y$

$I_{Gy} = \frac{1}{2}MR^2 \qquad \vec{L}_G = \frac{1}{2}MR^2\omega\vec{e}_y$

ω dépend du temps ! $\omega(t)$ cette information est restée implicite !

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_G = \frac{1}{2}MR^2\dot{\omega}\vec{e}_y = RT\vec{e}_y \qquad \dot{\omega} = \frac{2RT}{MR^2} = \frac{2T}{MR} = cte$$

$\alpha = cte$ accélération angulaire $\qquad \omega = \frac{2T}{MR}.t + \cancel{\omega(t=0)}\ 0$

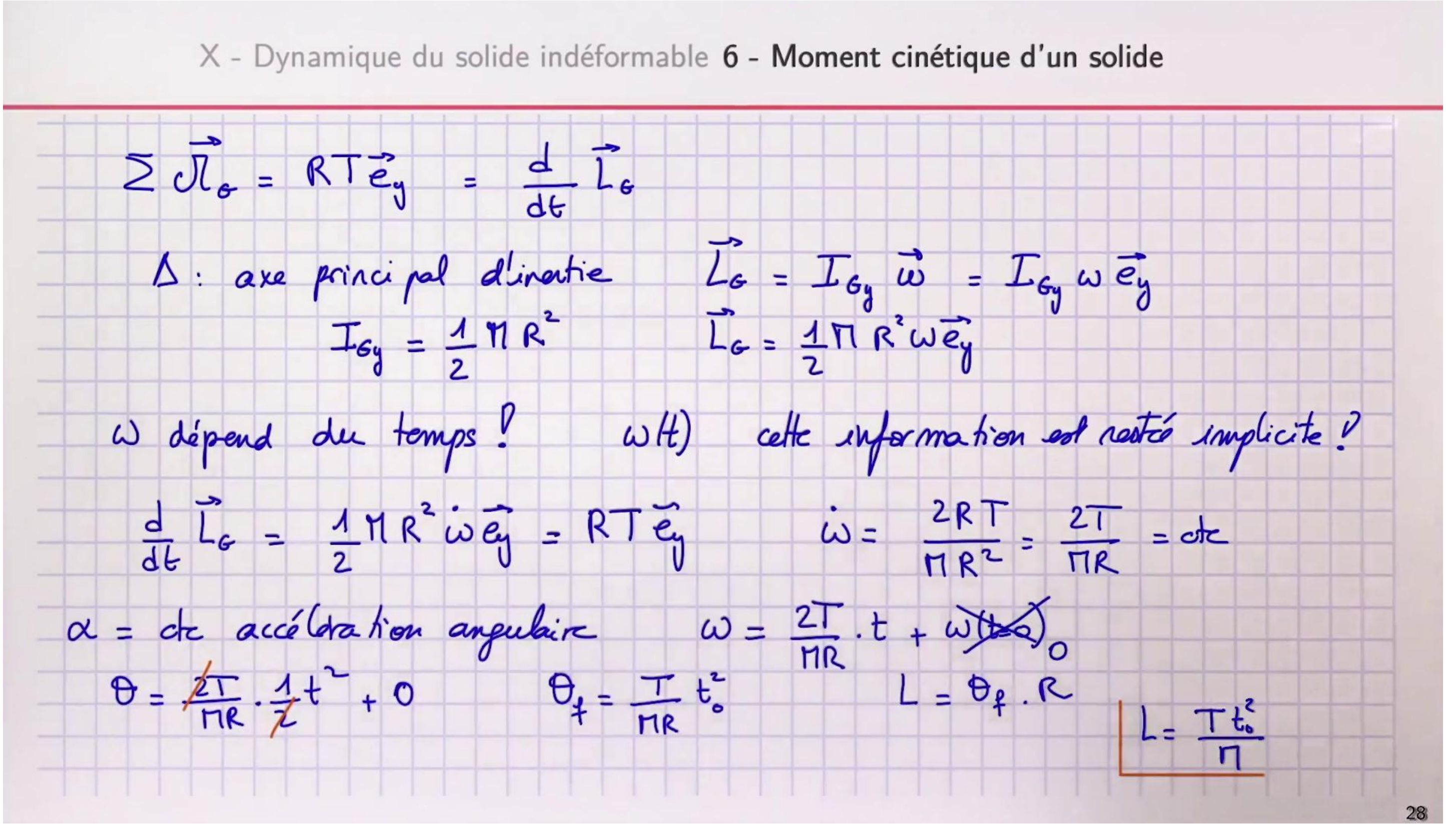
$$\theta = \frac{2T}{MR}\cdot\frac{1}{2}t^2 + 0$$

Lorsque je vais calculer la dérivée par rapport au temps du vecteur moment cinétique, les termes constants ne seront pas dérivés. Je vais donc garder 1/2 MR² et je vais devoir dériver ω qui sera ω point. ey, ceci est égal à la somme des moments des forces soit RTey. Projeté sur ey et en isolant ω point, j'obtiens donc ω point = 2RT/MR² Soit 2T/MR. Or, la tension exercée est constante. La masse est constante, le rayon est constant. C'est donc une constante. La dérivée du vecteur rotation étant une constante, cela signifie que j'ai un mouvement de rotation uniformément accélérée. L'accélération angulaire est une constante. Lorsque je vais chercher à calculer la longueur parcourue, je vais le faire en calculant l'angle dont a tourné la poulie. Il va donc falloir que j'intègre deux fois ω point. Je vais intégrer une première fois ω point. Cela va me donner ω = 2T/MR multipliée par le temps plus la valeur de ω à t=0. Or à t=0, je commence sans vitesse angulaire initiale, donc ce terme vaut 0. L'angle dont a tourné la tourné la poulie sera donc la primitive de ω, ϴ= 2T/MR multipliée par (1/2)t² plus l'angle initial que je vais prendre également à 0. Les deux se simplifient.

Notes

Summary

7m 22s

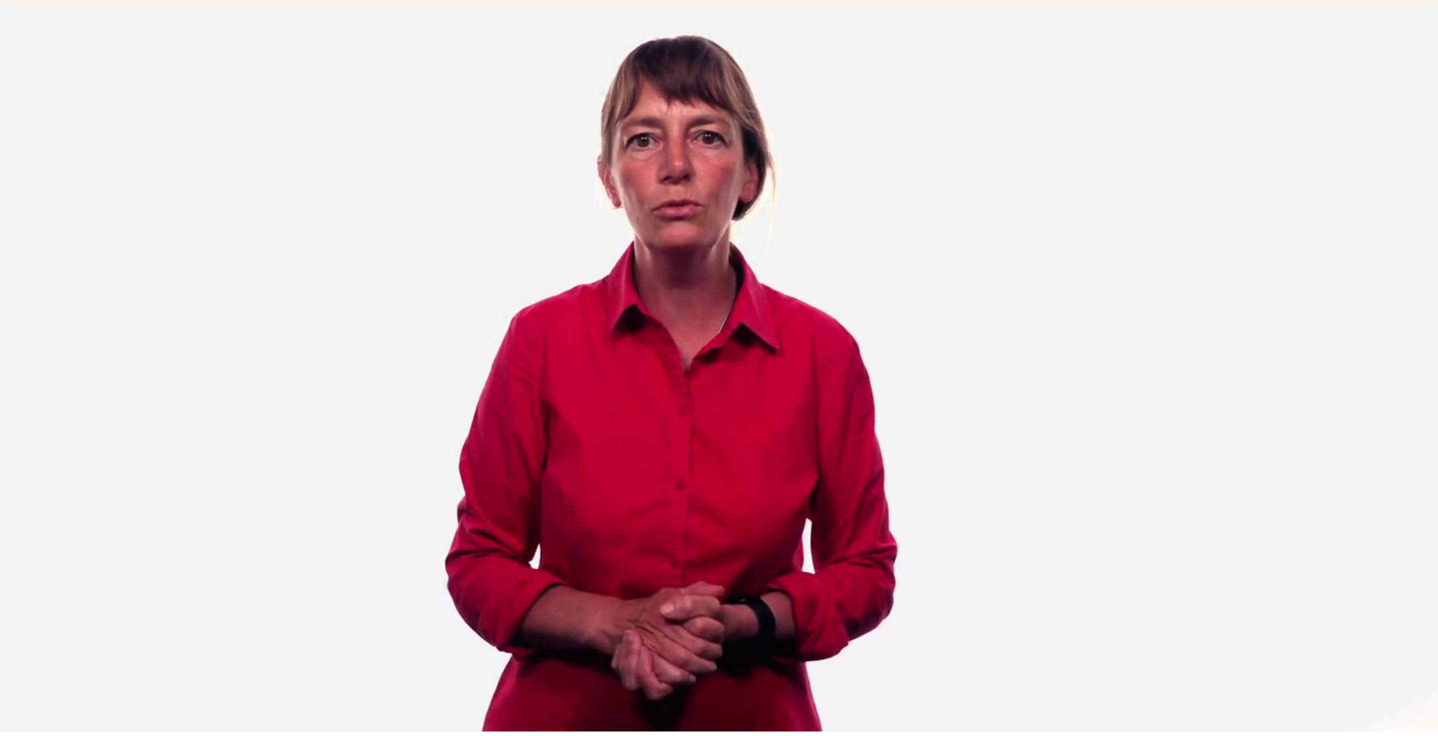


L'angle total dont aura tourné la poulie à la fin Θf = (T/MR)t²0. Nous cherchons la longueur de corde déroulée. La longueur de corde est liée à l'angle par L = Θf multiplié par R. J'obtiens Θf multiplié par R avec un R en bas et un R en haut, ces R vont se simplifier. L = Tt²0/M.

Notes

Summary

9m 19s



voilà, vous venez de voir un exemple typique de résolution d'un exercice dans lequel nous avons un solide en rotation autour d'un axe principal d'inertie. Cela nous a permis d'utiliser le théorème du moment cinétique pour déterminer le comportement du solide.

Notes

Summary

10m 01s