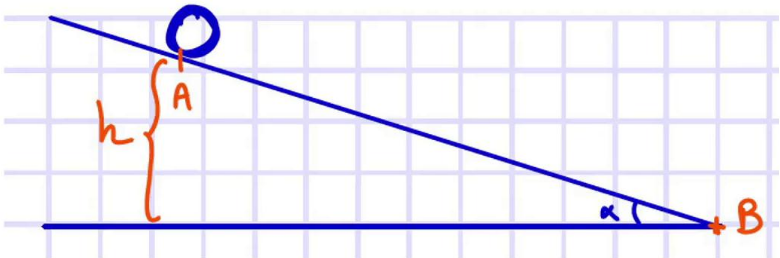
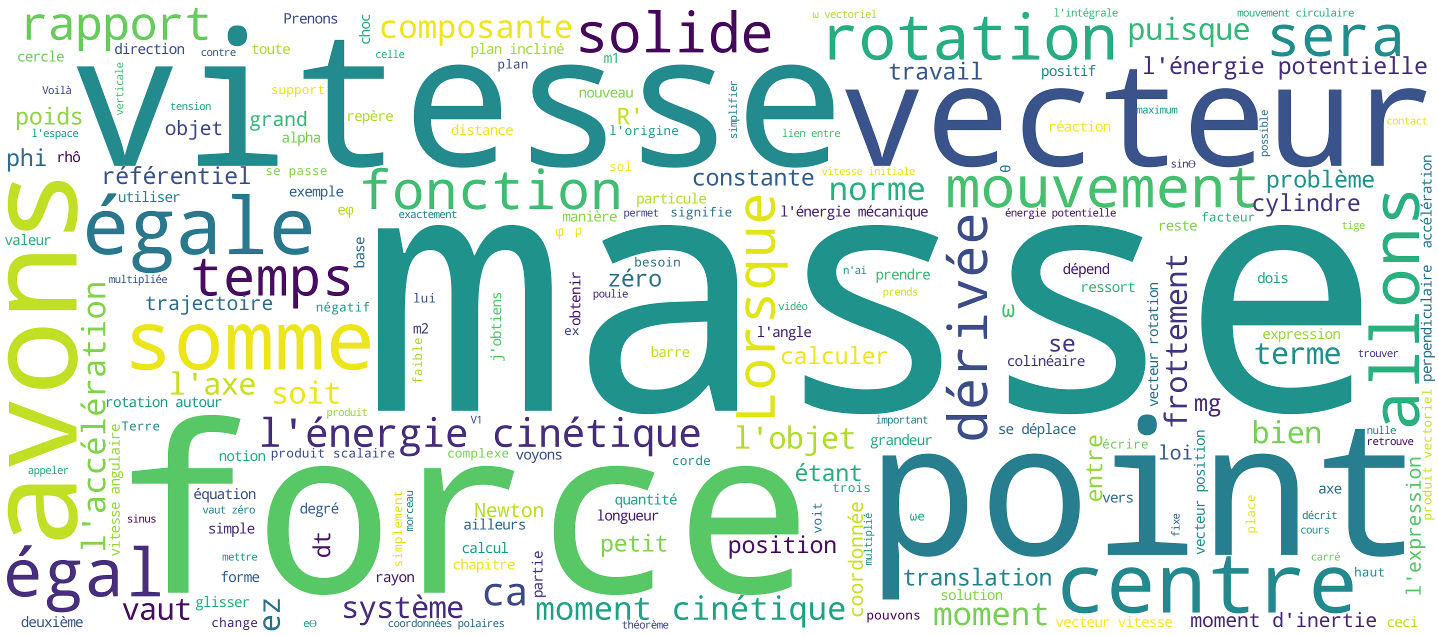
Moment d'inertie d'un solide

Partie2: exemple

Prof. Cécile Hébert

Application





Video

Plan du cours

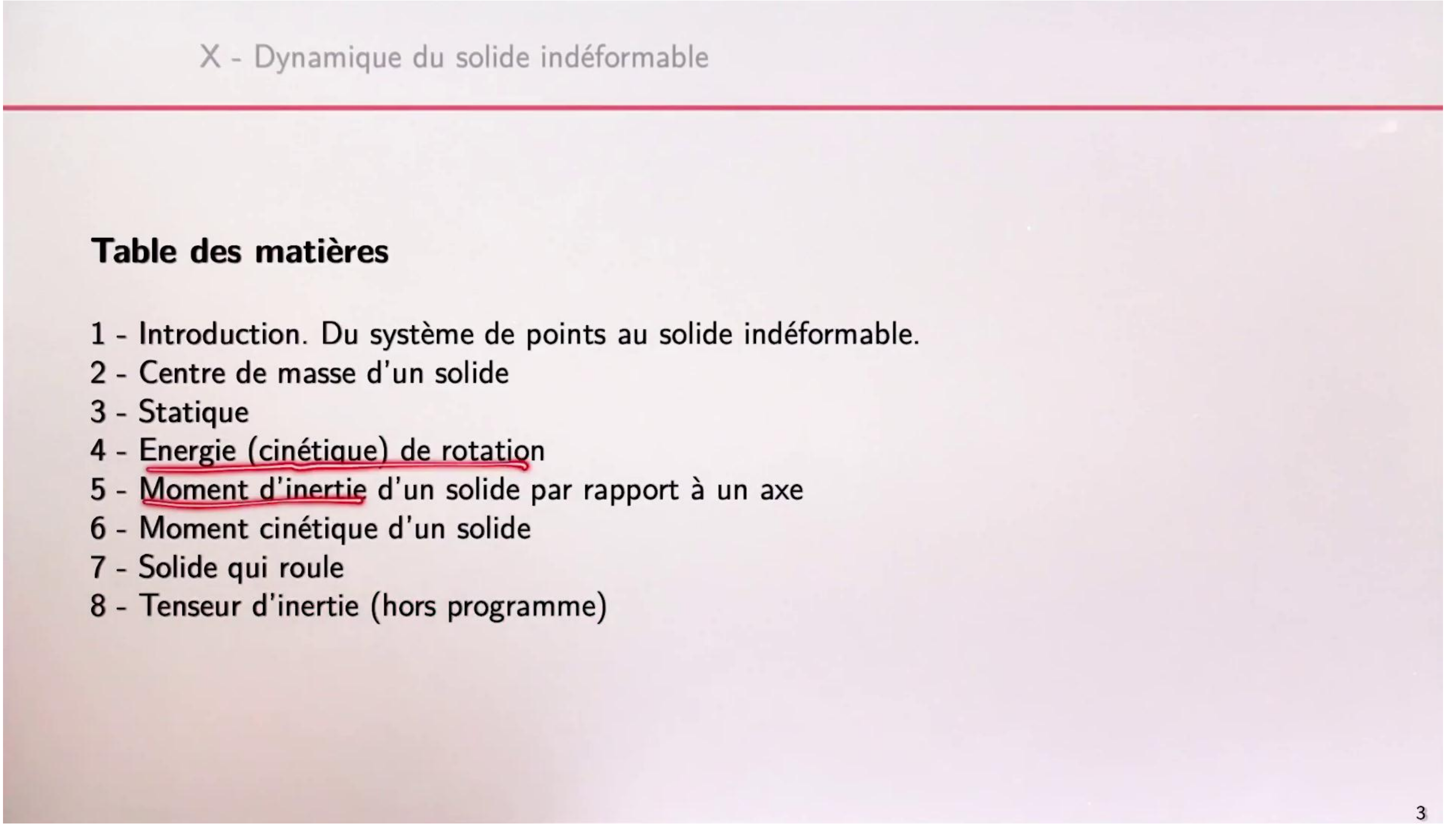
2

Nous allons voir dans cette vidéo une première application utilisant les outils mis en place jusqu'à présent. Il s'agit de calculer la vitesse acquise par un solide qui roule le long d'un plan incliné. Pour cela, nous allons utiliser l'énergie cinétique, l'énergie de rotation et la notion de moment d'inertie.

Notes

Summary

0m 04s

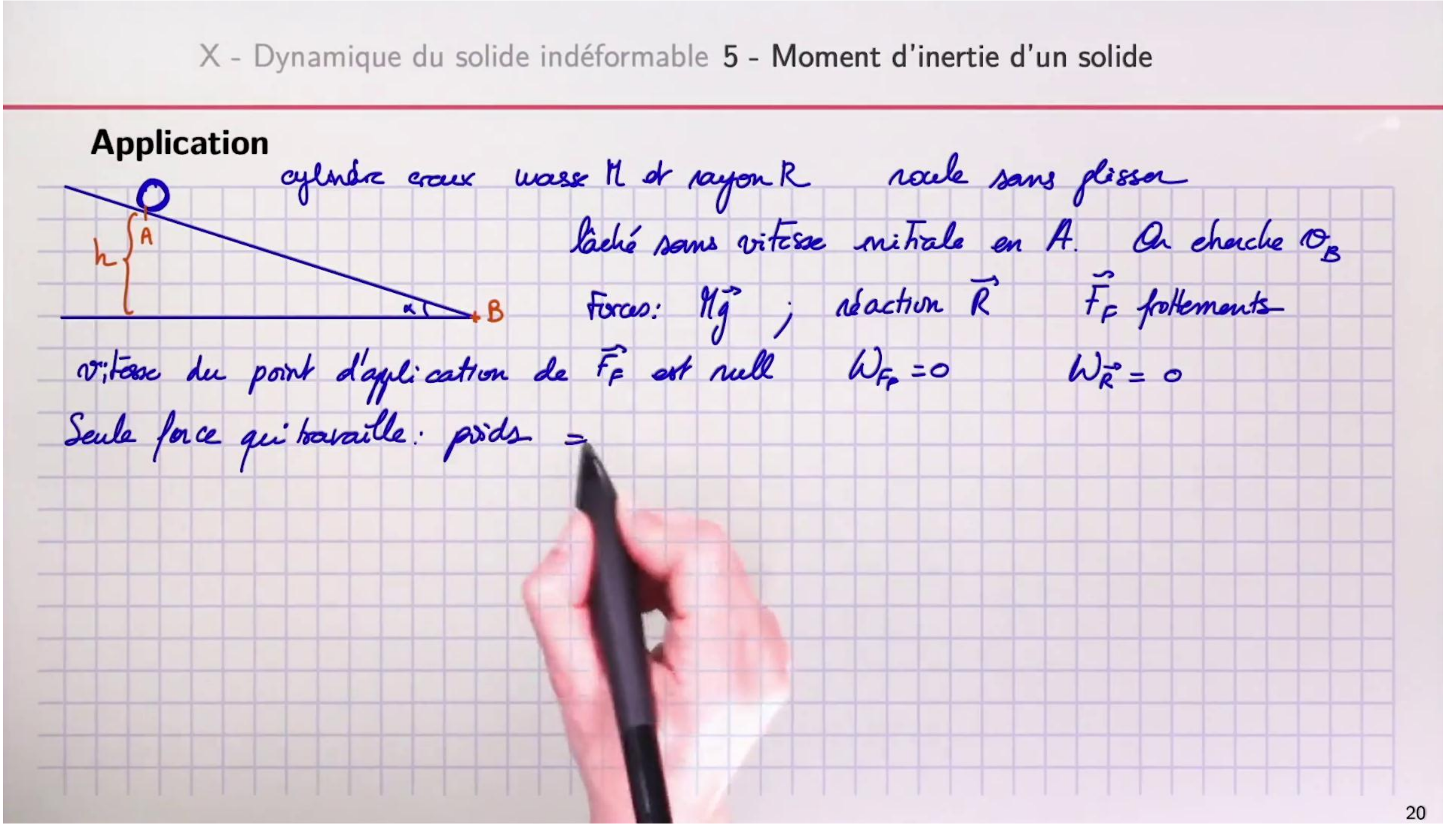


Nous sommes dans le chapitre X sur le solide indéformable et nous allons voir une application dans le chapitre 5 utilisant à la fois le moment d'inertie et l'énergie cinétique de rotation.

Notes

Summary

0m 25s



Nous allons maintenant considérer une application de cette notion d'énergie cinétique de rotation. Considérons la situation suivante : j'ai un plan incliné d'un certain angle α et sur ce plan incliné, je place un cylindre creux de masse M et de rayon R. Ce cylindre peut rouler sans glisser. Il est lâché sans vitesse initiale depuis un point A et on s'intéresse à la vitesse qu'il atteint en B. Comme paramètre, nous prendrons la hauteur de chute h. Puisque le cylindre roule sans glisser sur le plan incliné, les forces en présence sont : le poids Mg, la réaction R et la force de frottement Ff. Le cylindre roule sans glisser. Dans son mouvement de descente, le point d'application de la force de frottement sur le cylindre qui est le point de contact avec le plan incliné est toujours à vitesse nulle. La vitesse du point d'application de la force de frottement est nulle. Le travail de la force de frottement est donc égal à zéro. La réaction est perpendiculaire au support, le travail de la réaction est égal à zéro. Seul le travail du poids sera non nul. Le poids est une force conservative. Nous allons donc avoir une conservation de l'énergie mécanique.

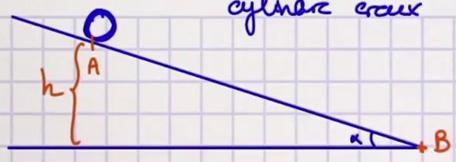
Notes

Summary

0m 39s

X - Dynamique du solide indéformable 5 - Moment d'inertie d'un solide

Application



cylindre creux masse M et rayon R roule sans glisser

lâché sans vitesse initiale en A. On cherche v_B

Forces: $M\vec{g}$; réaction $\vec{R}$ $\vec{F_F}$ frottements

vitesse du point d'application de $\vec{F_F}$ est nulle $W_{F_F} = 0$ $W_{\vec{R}} = 0$

Seule force qui travaille : poids $\Rightarrow$ conservation de $E_m = E_p + E_{c,trans,G} + E_{c,rot\ autour\ de\ G}$

$E_{c,trans} = E_c = \frac{1}{2} M v_G^2$; $E_{rot} = \frac{1}{2} I_{Gz} \omega^2$ $I_{Gz} = MR^2$

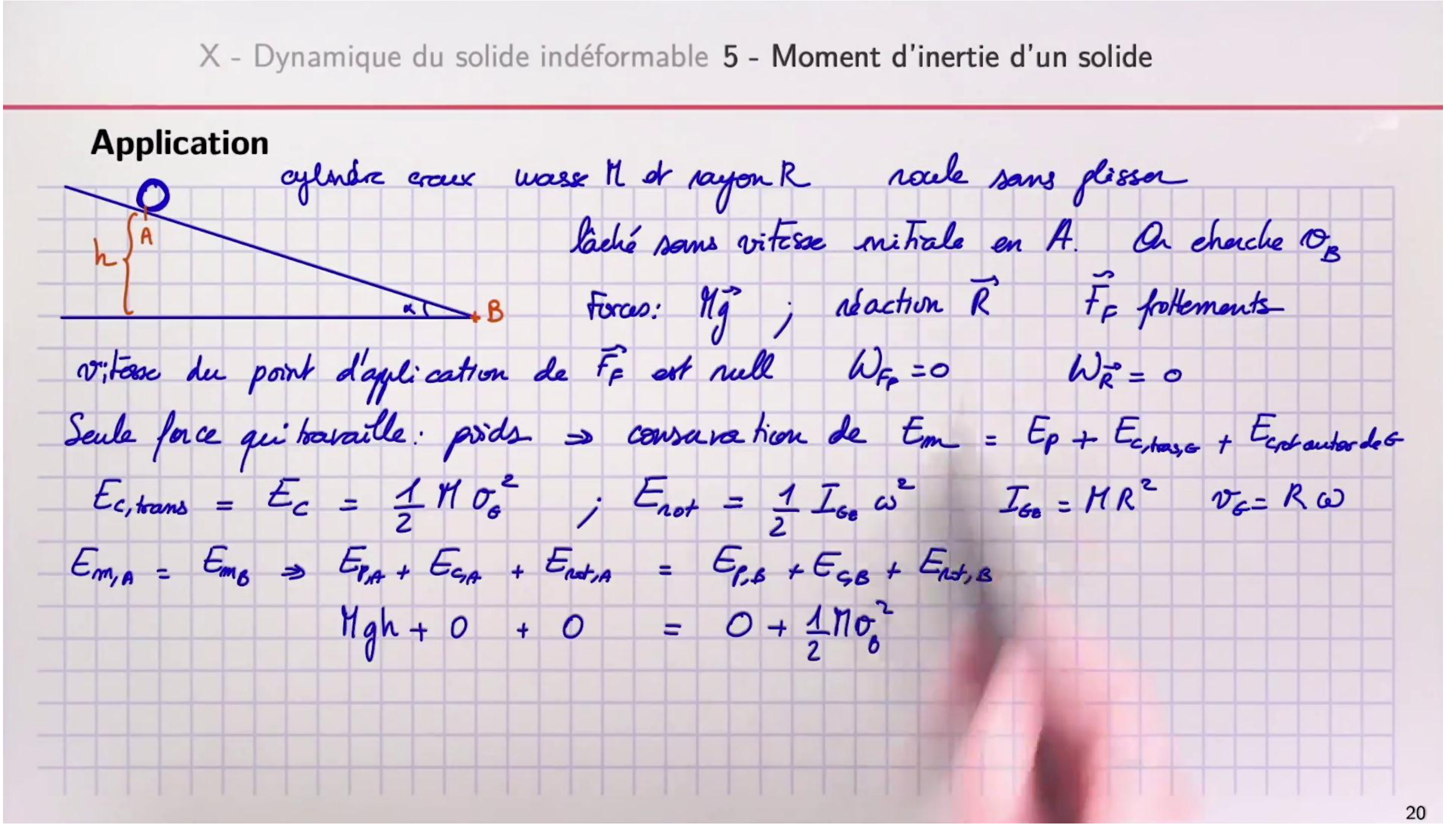
20

Cette énergie mécanique est composée d'une part de l'énergie potentielle et d'autre part d'énergie cinétique. Comment calculer l'énergie cinétique de ce cylindre ? Le cylindre a un mouvement de translation global à la vitesse v qui est la vitesse du centre de masse. Mais en plus, puisqu'il roule sans glisser, il tourne autour de son centre de masse. J'ai donc une contribution à l'énergie cinétique des petits morceaux du cylindre. C'est l'énergie cinétique de rotation. L'énergie mécanique est donc égale à l'énergie cinétique de translation du centre de masse + l'énergie cinétique de rotation autour du centre de masse. Évidemment, ici, c'est « + ». L'énergie cinétique de translation du centre de masse est en général, tout simplement appelé Ec. C'est ½MvB². L'énergie cinétique de rotation autour du centre de masse est généralement tout simplement notée « Erot ». Nous avons vu l'énergie cinétique de rotation autour d'un axe, c'est ½Igzω². Igz étant le moment d'inertie autour de l'axe du cylindre. Et pour un cylindre creux, c'est MR². Par ailleurs, puisque nous avons un roulement sans glisser nous avons un lien entre la vitesse de translation du centre de masse et la vitesse de rotation ω.

Notes

Summary

2m 19s



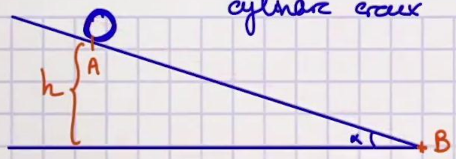
Ce lien est que VG=Rω si R est le rayon du cylindre. Je vous propose, munis de ceci, de faire une pause dans la vidéo et d'essayer de résoudre le problème vous-mêmes pour trouver la vitesse du cylindre en B. Voyons maintenant la résolution totale. L'énergie mécanique en A est égale à l'énergie mécanique en B. Je peux réécrire cela en disant que l'énergie potentielle en A + l'énergie cinétique de translation en A + l'énergie cinétique de rotation en A est égale à l'énergie potentielle en B + l'énergie cinétique de translation en B + l'énergie cinétique de rotation en B. Prenons comme origine des énergies potentielles, l'altitude du point B. À ce moment-là, l'énergie potentielle en A sera Mgh et l'énergie potentielle en B, puisque c'est l'origine, vaudra zéro. Nous lâchons l'objet sans vitesse initiale depuis A. Sa vitesse de translation en A et sa vitesse de rotation en A sont zéro. L'énergie cinétique en A et l'énergie de rotation en A sont nulles. L'objet arrive en B avec la vitesse vB. L'énergie cinétique en B sera donc ½MvB². Puisque l'objet roule sans glisser, en B, il a aussi une vitesse angulaire correspondant à la rotation autour du centre de masse avec la vitesse angulaire ω et son énergie de rotation sera ½Iω².

Notes

Summary

4m 19s

Application



cylindre creux masse M et rayon R roule sans glisser

lâché sans vitesse initiale en A. On cherche v_B

Forces: $M\vec{g}$; réaction $\vec{R}$ $\vec{F_F}$ frottements

vitesse du point d'application de $\vec{F_F}$ est nulle $W_{\vec{F_F}} = 0$ $W_{\vec{R}} = 0$

Seule force qui travaille : poids $\Rightarrow$ conservation de $E_m = E_p + E_{c,trans,G} + E_{c,rot\ autour\ de\ G}$

$E_{c,trans} = E_c = \frac{1}{2} M v_G^2$; $E_{rot} = \frac{1}{2} I_{Gz} \omega^2$ $I_{Gz} = MR^2$ $v_G = R\omega$

$E_{m,A} = E_{m,B} \Rightarrow E_{p,A} + E_{c,A} + E_{rot,A} = E_{p,B} + E_{c,B} + E_{rot,B}$

$Mgh + 0 + 0 = 0 + \frac{1}{2} M v_B^2 + \frac{1}{2} I_{Gz} \omega_B^2 = \frac{1}{2} M v_B^2 + \frac{1}{2} M \cancel{R^2} \frac{v_B^2}{\cancel{R^2}}$

$\cancel{M}gh = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{M} v_B^2$ $\boxed{v_B = \sqrt{gh}}$ Objet qui glisse sans rouler $v_B = \sqrt{2gh}$

20

C'est Igz et c'est le ω acquis en B. Je peux maintenant remplacer Igz par MR², moment d'inertie de cet objet par rapport à l'axe de rotation et ωB², par VB/R. Je peux simplifier les R² et obtenir ½MvB² + ½MvB². J'ai donc au final Mgh = 2.½MvB². En simplifiant les 2 et les M, j'obtiens vB² = gh, soit vB =√gh. On obtient une expression qui ressemble un peu à celle d'un objet qui glisse le long d'un plan incliné mais il me manque « un facteur 2 ». Pour un objet qui glisse sans rouler, nous avions trouvé VB=√2gh. La vitesse en B de l'objet qui roule est donc plus faible que la vitesse en B de l'objet qui glisse. C'est logique, parce que l'énergie potentielle au départ est la même et lorsque l'objet roule j'ai dû utiliser une partie de cette énergie potentielle pour la mettre dans la rotation.

Notes

Summary

6m 27s

Nous venons de voir un exemple qui montre qu'en mécanique du solide comme en mécanique du point, les notions d'énergie peuvent être très puissantes pour résoudre des problèmes rapidement. Nous avons bien vu qu'en plus de l'énergie cinétique de translation, il faut prendre en compte l'énergie de rotation liée à la rotation du solide autour de son centre de masse.

Notes

Summary

8m 02s